UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA

INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO

MESTRADO EM: Ciências Actuariais

FÓRMULA E DESIGUALDADE DE LUNDBERG: APLICAÇÃO AO RESSEGURO EXCESS OF LOSS

IRIS ANA GOMES NÚNCIO CRISPIM

Orientação: Doutor João Tiago Praça Nunes Mexia

Júri:

Presidente: Doutor Alfredo Duarte Egídio dos Reis

Vogais: Doutor João Tiago Praça Nunes Mexia

Doutora Isabel Maria Ferraz Cordeiro

Dr. Jorge Manuel Afonso Garcia

Julho/2004

UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA
INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO

MESTRADO EM: Ciências Actuariais

FÓRMULA E DESIGUALDADE DE LUNDBERG: APLICAÇÃO AO RESSEGURO EXCESS OF LOSS

IRIS ANA GOMES NÚNCIO CRISPIM

Orientação: Doutor João Tiago Praça Nunes Mexia

Júri:

Presidente: Doutor Alfredo Duarte Egídio dos Reis

Vogais: Doutor João Tiago Praça Nunes Mexia

Doutora Isabel Maria Ferraz Cordeiro

Dr. Jorge Manuel Afonso Garcia

Julho/2004

Glossário de termos e abreviaturas

Página	Notação	Significado
1	$\int_a^b g(u)dF(u)$	integral de Stieltjes de g(.) relativamente a F(.) em [a,b[
1	F(x)	função distribuição da variável aleatória X
2	f(x)	função densidade da variável aleatória X
2	$\int_a^b g(u)f(u)du$	integral de Riemann de g(.) relativamente a f(.) em [a,b[
3	E(X)	valor médio da variável aleatória X
4	$\mu_r'(a)$	momento de ordem r relativo ao ponto a
4	σ^2	variância da variável aleatória X
4	$\varphi(t\|X)$	função geradora de momentos da variável aleatória X
5	v.a.	variável aleatória
6	álgebra-σ	
6	$\mathcal{A}$	familia de conjuntos
7	$\sigma(T)$	álgebra-σ gerada por T
7	$(\Omega, \mathcal{A}, P)$	espaço de probabilidade
7	$(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$	espaço de medida
7	λ	medida definida em $\mathcal{A}$
8	**B**	álgebra-σ de Borel em $\Re$
11	$\int f d\lambda$	integral de f em Ω
11	$f^+; f^-$	parte positiva e parte negativa de f

Nota: para definições longas ver na página indicada

Página	Notação	Significado
11	J_C	função indicatriz do conjunto $C \in \mathcal{A}$
12	$E^{\mathcal{A}'}(X)$	$E(X\|\mathcal{A}')$, valor esperado de X dada a álgebra-σ $\mathcal{A}'$
14	$\{N(t); t > 0\}$	processo estocástico de parâmetro contínuo a tomar valores inteiros não negativos
15	i.i.d.	independentes e identicamente distribuídos
16	L(t)	medida de intensidade
17	$\{S(t); t \geq 0\}$	processo de Poisson composto que representa o total dos sinistros ocorridos até ao instante t
18	$\Psi(t\|X), \Psi_X(t)$	logaritmo da função geradora de momentos da variável aleatória X
20	$\{\Delta(t); t \geq 0\}$	medida aleatória difusa
20	$\{\widetilde{N}(t); t \geq 0\}$	processo de Cox
22	$F^{[n]}(.)$	n-ésima potência convolutiva de F
23	m(.)	valor médio das ocorrências do processo estocástico N(.) definido na pg.22
24	$\underline{m}_n(a), \overline{m}_n(a)$	ínfimo e o supremo, respectivamente, de uma função definida em $[0, \infty]$ no intervalo [(n-1)a,na]
25	g(.)	valor médio ou uma probabilidade dependente do tempo
27	X	o montante de cada indemnização
27	M	limite de retenção no resseguro Excess of Loss
27	h(.)	pagamento retido pela seguradora

Página	Notação	Significado
27	$a_k(M)$	k-ésimo momento em relação à origem das indemnizações retidas
27	$P_M()$	função distribuição da variável aleatória $h(X)$
28	$\overline{a}_k(M)$	k-ésimo momento em relação à origem das indemnizações cedidas
29	$\{X(t); t \geq 0\}$	processo estocástico que representa a perca agregada
		até ao instante t
29	U(t)	a provisão de um risco de uma seguradora no instante t
29	u_0	a provisão inicial
29	Z	variável aleatória que representa as indemnizações particulares
30	$\Psi(u)$	probabilidade de ruína
30	$\Phi(u)$	probabilidade de sobrevivência
30	T	tempo de ruína
34	$f^{\bullet}()$	função densidade das indemnizações
35	$F^{\bullet}()$	função distribuição das indemnizações
35	$\mu^{\bullet}$	valor médio das indemnizações
35	R	expoente de Lundberg
37	$\{Y(t), t \geq 0\}$	processo estocástico definido na pg.38
38	$\varphi(r, t)$	função geradora de momentos da variável aleatória Y(t)
38	$m^{\bullet}()$	valor esperado da variável aleatória Y
39	$\varphi^{\bullet}(t\|r)$	função geradora de momentos da variável aleatória Y(t)
40	T_u	tempo de ruína para a provisão inicial u

Página	Notação	Significado
40	$M_u(r,t)$	
41	$t_0 \wedge T_u$	$min\{t_0, T_u\}$
43	S_i	instante da ocorrência do i-ésimo sinistro
43	X_i	a perda entre dois sinistros
44	Y_n	perda imediatamente após o n-ésimo sinistro
44	G(.)	a função de distribuição da variável aleatória X
44	γ	valor médio da variável aleatória X
45	$\mathcal{A}_n$	álgebra-σ gerada pelas variáveis aleatórias $Y_1, ..., Y_n$
46	$N_u^\bullet$	n° de sinistros até à ruína dada a provisão inicial u
47	$\Psi^\bullet(u)$ e $\Phi^\bullet(u)$	probabilidades de ruína e sobrevivência
		para o processo de renovação usual
47	$\Psi(u)$ e $\Phi(u)$	probabilidades de ruína e sobrevivência
		para o processo de renovação estacionário
50	Λ	medida de intensidade
50	$\mathcal{A}_t^\Lambda$	álgebra-σ definida por $\sigma\{\Lambda(t'); t' \leq t\}$
51	$\mathcal{A}_t^N$	álgebra-σ definida por $\sigma\{N(s); s \leq t\}$
51	M(.)	
52	C(.)	(2.3.26)
54	p(.)	função densidade das indemnizações particulares

Resumo

Os limites de Lundberg e resultados relacionados são estabelecidos sucessivamente para:

processos de Poisson;

processos de renovação;

processos de renovação estacionários;

processos de Cox.

Com base nos resultados obtidos, a propriedade optimal do resseguro excess of loss é extendida para além dos processos de Poisson aos processos de renovação usual e estacionária.

Vê-se assim que, debaixo de condições bastante gerais, esse tipo de resseguro minimiza o limite superior da probabilidade de ruína.

Palavras chave: Probabilidade de ruína, expoente de Lundberg, limites de Lundberg, resseguro excess of loss.

Abstract

The Lundberg limits and concerning results are obtained successively for:

Poisson process;

renewal process;

stationary renewal process;

Cox processes.

Based on the obtained results the optimal property of excess of loss reinsurance is extended beyond the Poisson process to renewall and stationary renewall processes.

Sow that in general conditions, that type of reinsurance minimize the upper bound of ruin probability.

Keywords: ruin probability, Lundberg exponent, Lundberg limit, excess of loss reinsurance

Conteúdo

Prefácio

Entre os resultados fundamentais da teoria do risco encontram-se a fórmula e a desigualdade de Lundberg para a probabilidade de ruína em horizonte infinito.

Vamos procurar estabelecer estes resultados em condições sucessivamente mais gerais.

Começaremos pelo modelo clássico, passando aos modelos de renovação, e, finalmente aos processos de Cox. Os primeiros modelos estão ligados a tempos entre sinistros independentes e identicamente distribuídos com distribuição exponencial. Se se abandonar a exigência da distribuição ser exponencial ter-se-á um modelo de renovação usual.

Estes dois primeiros processos têm sido muito estudados, veja-se por exemplo Egídio dos Reis (1999). Segue-se, o não se exigir que o tempo até ao primeiro sinistro tenha distribuição idêntica aos tempos entre sinistros, o que nos leva a considerar processos de renovação estacionários.

Todos os modelos até aqui têm tido intensidade deterministica.

A fase seguinte será, através dos processos de Cox, passar a considerar intensidade aleatória.

Aliás o caso dos processos de Cox foi alvo de um tratamento devido a Embrecht, et al (1993).

Os limites de Lundberg considerados são estudados ainda com bastante detalhe em Rolski et al (1999). Estes autores relacionam estes limites com a cauda direita da distribuição dos sinistros acumulados.

No entanto, o grande interesse do nosso estudo é podermos, no final, extender aos processos de renovação, usuais e estacionários, a propriedade optimal do resseguro excess of loss. Com efeito, verificadas certas condições, esse resseguro maximiza o expoente de Lundberg e, consequentemente, minimiza o limite superior para a probabilidade de ruína, dai o título desta dissertação.

Para tornar o nosso trabalho auto-suficiente no próximo capítulo apresentaremos os resultados que nos serão necessários.

Agradecimentos

É com o maior prazer que exprimo a minha gratidão a todos aqueles que, de várias formas, me ajudaram e contribuiram para a conclusão desta dissertação.

Nesse sentido quero em primeiro lugar agradecer, ao Professor Doutor João Tiago Mexia, meu orientador todos os conselhos e criticas, bem como toda a disponibilidade e incentivo que me dispensou nos momentos onde me encontrei menos motivada para a realização desta tese.

Agradeço ao Professor Doutor Manuel Luis Esquível, pela sua disponibilidade em fazer criticas e sugestões sempre oportunas.

Por fim, à minha família e aos meus amigos, pelo apoio e compreensão demonstrada.

A todos, Bem-Hajam!

1 Resultados Preliminares

1.1 Integral de Stieltjes

Considere-se o módulo da decomposição do intervalo [a,b[nos sub-intervalos $[x_{j-1}, x_j[; j = 1, ..., w$ dado por:

$$|D| = Máx\{x_j - x_{j-1}; j = 1, ..., w\}$$

Caso se tivesse o intervalo [a,b] a definição do $|D|$ mantêm-se, alterando-se apenas o último intervalo da decomposição que passaria a fechado, $[x_{w-1}, x_w]$.

Tomemos $x_{j-1} \leq z_j \leq x_j; j = 1, ..., w$ bem como, com g(.) e F(.) funções definidas em [a,b]

$$S(g, F, D) = \sum_{j=1}^{w} g(z_j)(F(x_j) - F(x_{j-1}))$$

se, sempre que $|D| \to 0$, S(g,F,D) tender para o mesmo limite, esse limite será o integral de **STIELTJES** de g(.) relativamente a F(.) em [a,b[. Representaremos esse integral por $\int_a^b g(u)dF(u)$.

Como

$$\begin{aligned} S(g; \sum_{i=1}^{I} k_i F_i; D) &= \sum_{j=1}^{w} g(z_j)(\sum_{i=1}^{I} k_i F_i(x_j) - \sum_{i=1}^{I} k_i F_i(x_{j-1})) \qquad (1.1.1) \\ &= \sum_{i=1}^{I} k_i(\sum_{j=1}^{w} g(z_j)(F_i(x_j) - F_i(x_{j-1}))) \qquad (1.1.2) \end{aligned}$$

se os $\int_a^b g(u)dF_i(u), i = 1, ..., I$ estiverem definidos ter-se-á

$$\int_a^b g(u)d(\sum_{i=1}^{I} k_i F_i(u)) = \sum_{i=1}^{I} k_i \int_a^b g(u)dF_i(u) \qquad (1.1.3)$$

Analogamente se os $\int_a^b g_j(u)dF(u)$; j=1,...,J estiverem definidos, ter-se-á

$$\int_a^b (\sum_{j=1}^{J} c_j g_j(u))dF(u) = \sum_{j=1}^{J} c_j \int_a^b g_j(u)dF(u) \qquad (1.1.4)$$

Seja H(u) tal que H(u)=0 para $u < 0$ e H(u)=1 se $u \geq 0$. Se $a < v < b$ e g(.) for continua no ponto v obtém-se facilmente

$$\int_a^b g(u)dH(u-v) = g(v) \qquad (1.1.5)$$

Prova-se, ver Graves (1946), que, para $\int_a^b g(u)dF(u)$ estar definido, é necessário que g(.) e F(.) não tenham descontinuidades em comum no intervalo [a,b] e que basta que g(.) seja contínua e F de variação total limitada. Se g(.) for contìnua nos pontos $v_1, ..., v_I \epsilon [a, b]$ vem, devido a (1.1.1) e (1.1.5)

$$\int_a^b g(u)d(\sum_{i=1}^{I} k_i H(u-v_i)) = \sum_{i=1}^{I} k_i \int_a^b g(u)dH(u-v_i) = \sum_{i=1}^{I} k_i g(v_i)$$

Caso F(.) tenha derivada f(.) tem-se

$$F(x_j) - F(x_{j-1}) = f(z_j)(x_j - x_{j-1}) + O(x_j - x_{j-1}); j = 1, ..., w$$

podendo mostrar-se, ver Graves (1946), que, se estiver definido o integral de Stieltjes

$$\int_a^b g(u)dF(u) = \int_a^b g(u)f(u)du$$

reduzindo-se, neste caso, o integral de Stieltjes ao integral de Riemann.

Existindo $\lim_{a \to -\infty \,;\, b \to +\infty} \int_a^b g(u)dF(u)$, esse limite será $\int_{-\infty}^{+\infty} g(u)dF(u)$.

Se $\sum_{i=1}^{\infty} k_i g(v_i)$ convergir virá

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(u)d(\sum_{i=1}^{\infty} k_i H(u-v_i)) = \sum_{i=1}^{\infty} k_i g(v_i)$$

e, existindo o integral de Stieltjes e tendo F(.) a derivada f(.), ter-se-á

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(u)dF(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(u)f(u)du$$

Atendendo a (1.1.4), e caso estejam definidos os $\int_{-\infty}^{+\infty} g(u)dF_i(u)$, i=1,...,I, ter-se-á

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(u)d(\sum_{i=1}^{I} k_i F_i(u)) = \sum_{i=1}^{I} k_i \int_{-\infty}^{+\infty} g(u)dF_i(u)$$

assim, se $F_1(.)$ tiver derivada $f_1(.)$ e se $F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} k_i H(x-v_i) + F_1(x)$ convergir, estando definido o integral, ter-se-á

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(u)dF(u) = \sum_{i=1}^{\infty} k_i g(v_i) + \int_{-\infty}^{+\infty} g(u)f_1(u)du \qquad (1.1.6)$$

Quando $\int_a^b g(u)dF(u)$ e $\int_a^b F(u)dg(u)$ estão definidos tem-se, ver Graves (1946), a fórmula de integração por partes

$$\int_a^b g(u)dF(u) + \int_a^b F(u)dg(u) = g(b)F(b) - g(a)F(a) \qquad (1.1.7)$$

1.1.1 Momentos

Considere-se a variável aleatória X com distribuição F(.), g(x) terá o valor médio

$$E(g(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dF(x)$$

No caso de distribuições discretas, $F(x) = \sum_i p_i H(x-x_i)$ com $x_i < x_{i+1}$ e $\sum_i p_i = 1$ o valor médio é dado por

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)d(\sum_i p_i H(x-x_i)) = \sum_i p_i \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dH(x-x_i) = \sum_i p_i g(x_i)$$

caso a série convirja.

Quando a distribuição é continua, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$ e o valor esperado é dado por $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$ se este integral estiver definido.

No caso duma distribuição mista,

$$F(x) = \sum_i p_i H(x - x_i) + qF_1(x)$$

tem-se $\sum_i p_i + q = 1$ e estando definida (excepto em pontos isolados) $f_1(x) = F_1'(x) \geq 0$ o valor esperado será

$$\sum_i p_i g(x_i) + q \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f_1(x)dx$$

desde que a série convirja e o integral esteja definido.

O momento de ordem r relativo ao ponto a, será

$$\mu_r'(a) = E((X - a)^r)$$

enquanto que a variância σ^2, é dada por

$$\sigma^2 = \mu_2'(\mu) = E((X - \mu)^2).$$

1.1.2 Função geradora de momentos

A função geradora de momentos de $X \sim F(.)$ será

$$\varphi(t|X) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} dF(u)$$

particularizando obtém-se para o caso

- discreto, $\sum_i p_i e^{tx_i}$
- contínuo, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x)dx$
- misto, $\sum_i p_i e^{tx_i} + q \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_1(x)dx$

Pode estabelecer-se o seguinte teorema

Teorema Se $\varphi(t|X)$ está definida num intervalo aberto contendo a origem então é indefinidamente derivável na origem e

$$\mu_r'(X) = (\varphi^{(r)}(t|X))_{t=0} \,, \tag{1.1.8}$$

sendo $\varphi^{(r)}(t|X)$ a derivada de ordem r de $\varphi(t|X)$.

Diz-se que o suporte de F$(\cdot)$ é limitado se existirem a e b tais que F(a)=0 e F(b)=1.

Se F(.) tiver suporte limitado, $\varphi(t|X)$ está definida em $]-\infty, +\infty[$ pelo que (1.1.8) se verifica.

As funções geradoras de momentos identificam, ver Casella et al (1990), a distribuição de uma v.a., uma vez que se existirem duas funções geradoras de momentos iguais, então, as funções de distribuição, referem-se à mesma v.a. e inversamente.

Refiram-se ainda os teoremas, ver Casella et al (1990):

Teorema Se $\varphi(t|X_n)$ convergir pontualmente para $\varphi(t|X)$, a distribuição limite de X_n é a distribuição de X.

Teorema do Limite Central: Dadas as variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, $X_1, X_2, ..., X_n$, com valor médio μ e variância σ^2, pondo-se

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i,$$

a distribuição limite de $\sqrt{n}\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma}$ é a distribuição normal reduzida $N(|0, 1)$.

1.2 Alguns resultados da teoria da medida e integração

As noções de teoria da integração aqui apresentadas vêm desenvolvidas de uma forma muito cuidada em Bartle (1966) e Williams(1990).

Uma álgebra-σ de sub-conjuntos de Ω é uma familia $\mathcal{A}$ de conjuntos tal que:

- $\emptyset, \Omega \in \mathcal{A}$
- Se A $\in \mathcal{A}$, $A^C = \Omega - A \in \mathcal{A}$
- Se $A_n \in \mathcal{A}; n = 1, ..., \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

Intersectando álgebras-σ de sub-conjuntos de Ω obtêm-se álgebras-σ de sub-conjuntos de Ω. Em particular a familia de todos os sub-conjuntos de Ω constitui uma álgebra-σ de sub-conjuntos de Ω. Assim sendo T uma familia de sub-conjuntos de Ω existe sempre uma álgebra-σ de sub-conjuntos de Ω que contem T.

Intersectando todas as álgebras-σ de sub-conjuntos de Ω que contêm T obtém-se ainda uma álgebra-σ de sub-conjuntos de Ω que contém T. Esta última álgebra-σ, a <u>álgebra-σ gerada por T</u>, estará contida em qualquer álgebra-σ que contenha T

e será representada por $\sigma(T)$.

O par $(\Omega, \mathcal{A})$ será um espaço mensurável. Uma função λ de conjuntos definida numa álgebra-σ é uma *medida* se:

- for não negativa;
- $\exists A \in \mathcal{A} \quad \lambda(A) < +\infty$;
- for *aditiva-σ*, isto é, dados os conjuntos $A_n \epsilon \mathcal{A}$, disjuntos dois a dois, ter-se-á

  $\lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) \leq +\infty$

Quando $\lambda(\Omega) < +\infty$ a medida diz-se finita. Em particular se se tiver, com P(.) medida definida em $\mathcal{A}$, $P(\Omega) = 1$, a medida será de probabilidade.

Uma medida de probabilidade é *contínua*, isto se, $C_n \rightarrow C$ então $P(C_n) \rightarrow P(C)$.

Recorde-se que $C_n \rightarrow C$ se e só se

$$\limsup C_n = \liminf C_n = C$$

com

$$\begin{aligned} \limsup C_n &= \bigcap_{n} \bigcup_{m>n} C_m \\ \liminf C_n &= \bigcup_{n} \bigcap_{m>n} C_m \end{aligned}$$

O trio $(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ com λ medida definida em $\mathcal{A}$ será um *espaço de medida*. Se $\lambda = P$, com P medida de probabilidade definida em $\mathcal{A}$, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ será *espaço de probabilidade*.

Uma sucessão não decrescente de álgebras-σ de sub-conjuntos de Ω será um *filtro* *sobre* Ω.

Dada uma função real X definida em Ω, seja $\sigma(X)$ a álgebra-σ gerada pelos conjuntos $X^{-1}(]-\infty, y])$, $-\infty < y < +\infty$. Se $\sigma(X) \subsetneqq \mathcal{A}$, a função X será mensurável relativamente a $\mathcal{A}$.

Dada uma sucessão $(Y_\gamma : \gamma \epsilon D)$ de funções $Y_\gamma : \Omega \to \Re$, então

$$\daleth := \sigma(Y_\gamma : \gamma \epsilon D)$$

é definida de modo a ser a menor álgebra-σ $\daleth$ em Ω tal que cada função $Y_\gamma(\gamma \epsilon D)$ será mensurável relativamente a $\daleth$. Escreve-se

$$\sigma(Y_\gamma : \gamma \epsilon D) = \sigma(\{w \epsilon \Omega : Y_\gamma(w) \epsilon B\} : \gamma \epsilon D, B \epsilon \mathbf{B}) ,$$

onde **B** é a álgebra-σ de Borel em $\Re$, isto é, a álgebra-σ gerada por uma familia de subconjuntos abertos.

A soma e o produto de funções mensuráveis relativamente a $\mathcal{A}$ são mensuráveis.

Dada uma familia de funções $\{f_l; l \epsilon D\}$ afectadas dum indice l que varia em D tem-se a familia $\{\sigma(f_l), l \epsilon D\}$ das álgebras-σ gerada.

Embora $\bigcup_{l \epsilon D} \sigma(f_l)$ possa não ser uma álgebra-σ como é uma familia de subconjuntos de Ω gera uma álgebra-σ, $\sigma(\{f_l; l \epsilon D\}) = \sigma(\bigcup_{l \epsilon D} \sigma(f_l))$.

Estabeleçamos a

PROPOSIÇÃO 1

$\sigma(\{f_l; l \epsilon D\})$ é a menor álgebra-σ para a qual todas as funções $\{f_l, l \epsilon D\}$ são mensuráveis.

Dem: Se existisse uma álgebra menor $\mathcal{A}'$ para a qual todas as $\{f_l, l\epsilon D\}$, fossem mensuráveis ter-se-ía $\sigma(f_l) \subset \mathcal{A}', l\epsilon D$, bem como $\bigcup_{l\epsilon D} \sigma(f_l) \subset \mathcal{A}'$ o que é impossivel pois $\sigma(\{f_l; l\epsilon D\}) = \sigma(\bigcup_{l\epsilon D} \sigma(f_l))$. A tese está pois estabelecida .

Quando as funções $\{f_l, l\epsilon D\}$ são mensuráveis relativamente a $\mathcal{A}$ tem-se $\sigma(f_l) \subseteq \mathcal{A}, l\epsilon D$, bem como $\sigma(\{f_l, l\epsilon D\}) \subseteq \mathcal{A}$.

As variáveis aleatórias serão funções mensuráveis relativamente a $\mathcal{A}$ definidas em espaços de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Uma álgebra-σ $\mathcal{A}_1$ contida na álgebra-σ $\mathcal{A}$ é sub-álgebra-σ de $\mathcal{A}$. Sendo $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ sub-álgebras-σ de $\mathcal{A}$ as mesmas são *independentes* se quaisquer que sejam $C_1 \in \mathcal{A}_1$ e $C_2 \in \mathcal{A}_2$

$$P(C_1 \cap C_2) = P(C_1)P(C_2)$$

Por outro lado, sendo X uma variável aleatória definida em $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, a intersecção de todas as sub-álgebras-σ de $\mathcal{A}$ para as quais X é mensurável será a álgebra-σ gerada por X. Sendo $\sigma(X)$ a álgebra-σ gerada por X se a mesma for independente duma outra sub-álgebra $\mathcal{A}_1$ diremos que X é independente de $\mathcal{A}_1$.

Dada uma familia ν de variáveis aleatórias definidas em $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a intersecção, $\sigma(\nu)$ de todas as sub-álgebras-σ de $\mathcal{A}$ para as quais <u>todas</u> as variáveis aleatórias são mensuráveis será a *álgebra-σ gerada por ν*.

Um processo estocástico unidimensional de parâmetro *contínuo* $\{X_t; t > 0\}$ será uma familia de variáveis aleatórias afectadas do indice t; $t > 0$, e definidas no mesmo espaço de probabilidades $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Sendo $\sigma(\{X_{t'}; t' < t\})$ a álgebra-σ gerada pelas $X_{t'}$ com $t' < t$ teremos o filtro constituido por estas álgebras-σ. Diremos que este filtro é gerado pelo processo estocástico $\{X_t; t > 0\}$.

O processo $\{X_t; t > 0\}$ está *adaptado* ao filtro $\{A_t^+; t > 0\}$ se todas as $X_{t'}$, com $t' \leq t$, forem mensuráveis relativamente a $\mathcal{A}_t^+$. É evidente que um processo estocástico está adaptado ao filtro que gera.

Um processo estocástico $\{X_t; t > 0\}$ diz-se uma medida aleatória se tiver trajectórias não decrescentes. Uma destas medidas é *difusa* se, com probabilidade 1, tiver trajectórias continuas.

Vamos agora introduzir a noção de funções simples para, a partir daí, definir integrais em ordem a medidas e, em particular, chegarmos à noção de valor esperado para uma variável aleatória definida em $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Uma função f_s^0 diz-se *simples* se apenas tomar um número finito de valores $v_1, ..., v_n$. Esta função será mensurável relativamente a $\mathcal{A}$, se os conjuntos $C_1, ..., C_n$, onde toma os diferentes valores pertencerem a $\mathcal{A}$. Suponhamos que f_s^0 está definida num espaço de medida $(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ e que não toma valores negativos.

O integral de f_s^0 em Ω será

$$\int f_s^0 d\lambda = \sum_{j=1}^{n} v_j \lambda(c_j) \leq +\infty$$

Seja agora f função mensurável não negativa definida em $(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$, o integral de f em Ω é agora dada por

$$\int f d\lambda = \sup \{ \int f_s d\lambda; 0 \leq f_s \leq f \} \leq +\infty$$

isto é, pelo supremo dos integrais de funções simples não negativas majoradas por f.

Se f não for não negativa tem-se $f = f^+ - f^-$ com

$$\begin{aligned} f^+ &= \max\{f; 0\} \ e \\ f^- &= \max\{-f; 0\} \end{aligned}$$

sendo f mensurável e a mesma é integrável se e só se

$$\int |f| d\lambda = \int f^+ d\lambda + \int f^- d\lambda < +\infty$$

tomando-se então

$$\int f d\lambda = \int f^+ d\lambda - \int f^- d\lambda$$

Finalmente, sendo J_C a função indicatriz do conjunto $C \epsilon \mathcal{A}$, toma-se

$$\int_C f d\lambda = \int J_C f d\lambda$$

o que não levanta dificuldades pois $|J_C f| \leq |f|$.

Na teoria que estamos a considerar desempenha um papel central o

Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Bartle (1966)):

Seja (f_n) uma sequência de funções integráveis, as quais convergem quase por toda a parte para uma função mensurável f com valores reais. Se existir uma função integrável g tal que

$$|f_n| \leq g \ \forall n,$$

então f é integrável e $\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu$.

Caso esteja definida e seja finito, o integral em Ω de uma dessas funções o mesmo será o respectivo valor médio E(X). Observe-se que se está a exigir ter-se:

$$E(|X|) = \int |X| dP < +\infty$$

para se admitir que E(X) está definido.

O teorema fundamental dos valores esperados condicionais de Kolmogorov diz-nos, Williams (1990), que dadas:

- a variável aleatória X com valor médio E(X) definida no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, P)$;
- uma álgebra-σ $A' \subseteq \mathcal{A}$

existe uma variável aleatória Y definida em $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, tal que:

- Y é mensurável relativamente a $\mathcal{A}'$;
- $E(|Y|) < +\infty$
- dado C $\epsilon \mathcal{A}'$, $\int J_C Y dP = \int J_C X dP$

A variável aleatória Y será uma *versão* de $E(X|\mathcal{A}')$, isto é, do valor esperado de X dada a álgebra-σ $\mathcal{A}'$. Duas versões do mesmo valor esperado coincidem com probabilidade 1 pelo que falaremos apenas de $E(X|\mathcal{A}')$.

Em particular $E(X_{n+1}|X_1, ..., X_n)$ será o valor esperado de X_{n+1} dada $\sigma(X_1, ..., X_n)$

isto é, a álgebra-σ gerada pelas $X_1, ..., X_n$.

Um processo estocástico $\{X_t, t > 0\}$ adaptado a um filtro $\{\mathcal{A}_t, t > 0\}$ é uma martingala relativamente a $\mathcal{A}_t$ [super-martingala relativamente a $\mathcal{A}_t$; sub-martingala relativamente a $\mathcal{A}_t$] se:

- $E(|X_t|) < +\infty; \ \ t > 0$
- com $s > t : E(X_t|\mathcal{A}_s) = X_s \ [\leq X_s; \geq X_s]$

Caso o filtro seja gerado pelo processo, diz-se apenas *martingala*, *super-martingala* ou *sub-martingala.*

Uma *martingala* relativamente a $\mathcal{A}_t$, *super-martingala* relativamente a $\mathcal{A}_t$ ou *sub-martingala* relativamente a $\mathcal{A}_t$, é *contínua à direita* se:

- as trajectórias de $\{X_t, t > 0\}$ forem contínuas à direita;
- $\{\mathcal{A}_t, t > 0\}$ for contínuo à direita isto é, se $\mathcal{A}_t = \bigcap_{s>t} \mathcal{A}_s$, qualquer que seja $t > 0$.

Uma variável aleatória T é um *tempo de paragem* para um filtro $\{\mathcal{A}_t, t > 0\}$ se,

$$\forall t \geq 0, \{T < t\} \epsilon \mathcal{A}_t.$$

A partir da noção de tempo de paragem obtêm-se resultados importantes.

No que se segue utilizaremos o

Teorema do tempo opcional de paragem (versão simplificada) Grandell (1990)

Sendo $\{M_t, t > 0\}$ uma martingala [super-martingala] com trajectórias contínuas à direita e T um tempo de paragem associado ao filtro $\{\mathcal{A}_t, t \geq 0\}$ gerado por $\{M_t, t > 0\}$, tem-se

$$E[M(T)|\mathcal{A}(T)] = M(0)[\leq M(0)]$$

1.3 Processos de Poisson homogéneos e associados

1.3.1 Processos de Poisson homogéneos

Dado um processo estocástico de parâmetro contínuo $\{X_t; t \geq 0\}$ e os valores $0 < t_1 < t_2 < ... < t_n$ do parâmetro podemos definir os acréscimos

$$Y_i = X_{t_{i+1}} - X_{t_i};\ i = 1, ..., n-1$$

do processo.

Se as variáveis $Y_1, ..., Y_n$ forem independentes, quaisquer que sejam os valores do parâmetro, o processo terá *acréscimos independentes.*

Os *acréscimos* serão *estacionários* se, quaisquer que sejam t_1, t_2 e h, $X(t_2) - X(t_1)$ e $X(t_2 + h) - X(t_1 + h)$ tiverem a mesma distribuição.

Quando X_t apenas toma valores inteiros não negativos e crescentes substitui-se X_t por N_t sendo $\{N_t; t \geq 0\}$ um processo de contagem. Por exemplo, N_t pode ser o número de sinistros ocorridos até ao instante t a partir do instante $t_0 = 0$.

Uma classe importante de processos de contagem é constituida pelos processos de ***Poisson homógeneos.***

Até agora temos indicado o t como índice por coerência com a alinea anterior, no entanto é usual escrever-se N(t) em vez de N_t.

Assim $\{N(t); t > 0\}$ é *processo de Poisson homogéneo* se:

a) $N(0) = 0$;

b) $\{N(t); t \geq 0\}$ tem acréscimos independentes;

c) $\{N(t); t \geq 0\}$ tem acréscimos estacionários;

d) para todo o $t > 0$, $0 < Pr(N(t) > 0) < 1$;

e) para todo o $t > 0$, $\lim_{h \to 0} \frac{Pr(N(t+h)-N(t) \geq 2)}{Pr(N(t+h)-N(t)=1)} = 0$

Prova-se, ver Parzen (1965) que, com $\lambda = \lim_{t \to 0} \frac{Pr(N(t)>0)}{t}$, o acréscimo $N(t+h) - N(t)$ tem distribuição de Poisson com parâmetro λh.

Em particular, $N(t) = N(t) - N(0)$ terá distribuição de Poisson com parâmetro λt. Por outro lado, sendo L_1 o tempo até à primeira chegada e os intervalos L_i, i=2,... os tempos entre "chegadas"serão i.i.d. com distribuição

$$E(t|\lambda^{-1}) = 1 - e^{-\lambda t}; t \geq 0$$

O parâmetro λ é a *intensidade do processo* de Poisson Homógeneo .

Processos de contagem, martingalas e processos de renovação

Seja $\{N(t); t \geq 0\}$ um processo de contagem *simples*, isto é, é nula a probabilidade de ocorrências simultâneas, adaptado a um filtro contínuo à direita $\{\mathcal{A}(t); t \geq 0\}$

$$(\forall t : \mathcal{A}_t = \bigcap_{s>t} \mathcal{A}_s).$$

Admitamos que, $\forall t < \infty, N(t) < +\infty$ e representemos por $s_1, s_2, ..., s_m, ...$ os instantes de ocorrência. Estas serão realizações de variáveis aleatórias em que

N(.) cresce (de uma unidade).

Como o processo está adaptado ao filtro, sendo $\{\mathcal{A}_t^N; t \geq 0\}$ o filtro gerado pelo processo de contagem ter-se-à, $\forall t > 0, \mathcal{A}_t^N \subseteq \mathcal{A}_t$. Particularizando diremos que $\{N(t); t \geq 0\}$ é processo de Poisson associado ao filtro $\{\mathcal{A}_t; t \geq 0\}$ com *medida de intensidade* L(t) se

(i) N(t)-N(s) é independente de $\mathcal{A}_s$, $t > s$;

(ii) N(t)-N(s) tem distribuição de Poisson com parâmetro L(t)-L(s).

É evidente que todo o processo de Poisson é processo de Poisson associado ao filtro $\{\mathcal{A}_t^N;\ t > 0\}$ gerado por ele próprio. No entanto se $\mathcal{A}_t^N \subset \mathcal{A}_t$ a condição (i) introduz uma restrição ao alargar a familia dos acontecimentos para os quais os acontecimentos definidos a partir de N(t)-N(s) têm de ser independentes.

Consideremos agora o processo $\{N(t) - L(t);\ t \geq 0\}$. Como L(.) é uma função deterministica, dado $s < t$

$$(N(t) - L(t)) - (N(s) - L(s)) = (N(t) - N(s)) - (L(t) - L(s))$$

será independente de $\mathcal{A}_s, s < t$, com valor médio

$$E[(N(t) - L(t)) - (N(s) - L(s))] = (L(t) - L(s)) - (L(t) - L(s)) = 0$$

Assim

$$E[(N(t) - L(t))] = N(s) - L(s)$$

sendo portanto, $\{N(t) - L(t), t \geq 0\}$, uma martingala.

Tem-se, aliás, ver Grandell (1990) o

Teorema de Watanabe(1964)

Um processo de contagem $\{N(t); t > 0\}$ é um processo de Poisson associado a um filtro $\{\mathcal{A}(t); t > 0\}$ com medida de intensidade L(t) se e só se $\{N(t) - L(t); t > 0\}$ for uma martingala $\{\mathcal{A}(t); t > 0\}$.

Definição: O processo $\{N(t); t \geq 0\}$ diz-se de ***renovação*** se os intervalos de tempo entre ocorrências $S_1, S_2 - S_1, S_3 - S_2, ...$ forem independentes e se $S_2 - S_1, S_3 - S_2, ...$ tiverem a mesma distribuição $F^\bullet$. Caso S_1 também tenha distribuição $F^\bullet$, $\{N(t); t \geq 0\}$ chama-se ***processo de renovação usual***. Se $F^\bullet$ tiver média finita $\frac{1}{\alpha}$ e se S_1 tiver distribuição F dada por $F(t) = \alpha \int_0^t (1 - F^\bullet(s))ds$, o processo $\{N(t); t \geq 0\}$ será um **processo de renovação estacionário**. Nesta definição $S_1, S_2, ...$ serão os instantes de ocorrência.

1.3.2 Processos de Poisson Compostos

Dadas as variáveis $X_1, ...$ i.i.d., o processo $\{S(t); t \geq 0\}$, com

$$S(t) = \sum_{i=0}^{N(t)} X_i; t \geq 0$$

será um ***processo de Poisson composto*** sempre que $\{N(t); t \geq 0\}$ seja processo de Poisson homogéneo e as variáveis N(t) e $X_1, ...$ sejam independentes.

Estabeleçamos a:

PROPOSIÇÃO 2

Sendo $\varphi_V(r)$ a função geradora de momentos da variável aleatória V, com $\Psi_V(r) = \log(\varphi_V(r))$, tem-se $\varphi_{S(t)}(r) = \varphi_{N(t)}(\Psi_X(r))$.

Dem: Tem-se $\varphi_{N(t)}(r) = \sum_{m=0}^{\infty} Pr(N(t) = m)e^{mr}$ bem como

$$\varphi_{S(t)}(r) = E(e^{rS(t)}) = \sum_{m=0}^{\infty} Pr(N(t) = m)E(e^{rS(t)}|N(t) = m)$$

Ora, quando N(t)=m, $S(t) = \sum_{i=1}^{m} X_i$ e, dado as $X_1, ..., X_m$ serem i.i.d.,

$$E(e^{rS(t)}|N(t) = m) = \varphi_{\sum_{i=1}^{m} X_i}(r) = \varphi_X^m(r) = e^{m\Psi_X(r)} \tag{1.3.9}$$

o que, atendendo às expressões de $\varphi_{N(t)}(r)$ e $\varphi_{S(t)}(r)$, dá

$$\varphi_{S(t)}(r) = \sum_{m=0}^{\infty} Pr(N(t) = m)e^{m\Psi_X(r)} = \varphi_{N(t)}(\Psi_X(r)) \tag{1.3.10}$$

tal como queriamos estabelecer.

Desta proposição resulta

$$\Psi_{S(t)}(r) = \Psi_{N(t)}(\Psi_X(r))$$

Ora, é fácil de obter as expressões

$$\begin{aligned}
\Psi'_V(r) &= \frac{\varphi'_V(r)}{\varphi_V(r)} \\
\Psi''_V(r) &= \frac{\varphi''_V(r)\varphi_V(r) - (\varphi'_V(r))^2}{\varphi_V^2(r)} \\
\Psi'''_V(r) &= \frac{(\varphi'''_V(r)\varphi_V^3(r) - 3\varphi''_V(r)\varphi'_V(r)\varphi_V^2(r)) + 2\varphi'^3_V(r)\varphi_V(r)}{\varphi_V^4(r)}
\end{aligned}$$

vindo

$$\begin{aligned}
E(V) &= \Psi'_V(0) \\
\sigma^2(V) &= \Psi''_V(0) \\
\mu_3(V) &= \Psi'''_V(0)
\end{aligned}$$

já que

$$\begin{aligned}
\sigma^2(V) &= \mu_2'(V) - \mu^2(V) \\
\mu_3(V) &= \mu_3'(V) - 3\mu_2'(V)\mu(V) + 2\mu^3(V)
\end{aligned}$$

No caso do processo de Poisson composto tem-se

$$\varphi_{N(t)}(r) = e^{\lambda t(e^r - 1)}$$

vindo

$$\Psi_{N(t)}(r) = \lambda t(e^r - 1)$$

bem como

$$\Psi_{S(t)}(r) = \lambda t(\varphi_X(r) - 1)$$

e, consequentemente

$$\begin{aligned}
E(S(t)) &= \lambda t E(X) \\
\sigma^2(S(t)) &= \lambda t \mu_2'(X) \\
\mu_3(S(t)) &= \lambda t \mu_3'(X)
\end{aligned}$$

Segue-se a

Proposição 3

O processo de Poisson Composto $\{S_t; t \geq 0\}$ tem acréscimos independentes e estacionários

Dem: Se $0 < t_1 < ... < t_n$ os acréscimos $Y_i = S(t_{i+1}) - S(t_i) = \sum_{j=N(t_i)+1}^{N(t_{i+1})} X_j$ são independentes, visto as variáveis $X_1, ...$ serem independentes entre si e dos acréscimos $N(t_{i+1}) - N(t_i)$.

Por outro lado,

$$\varphi_{S(t+h)-S(t)}(r) = \varphi_{N(t+h)-N(t)}(\Psi_X(r)) = e^{\lambda h(\varphi_X(r)-1)}$$

Logo, a distribuição de S(t+h)-S(h) dependerá de h mas não de t, pelo que os acréscimos serão estacionários.

Como, sendo L_1 a duração da espera até a primeira chegada, se tem

$$Pr(L_1 \leq l) = Pr(N(l) \geq 1)$$

e N(l) é independente das $X_1, ...$, qualquer que seja l, L_1 é independente das X_1,... De maneira análoga se mostra que os L_i, i=2,..., também são independentes dos X_2,...

1.4 Processos de Cox

Estes processos são construídos a partir de processos de Poisson homógeneos $\{N_t; t \geq 0\}$ e de medidas de probabilidade aleatória difusas $\{\triangle_t; t \geq 0\}$ por composição tomando-se

$$\widetilde{N}(t) = N \circ \triangle(t); t \geq 0$$

Prova-se, ver Grandell (1990), que $\{\widetilde{N}_t; t \geq 0\}$ é um processo de **Cox** obtido a partir da medida de probabilidade aleatória $\{\triangle_t; t \geq 0\}$ se:

(i) os acréscimos N(t)-N(s) forem independentes da álgebra-σ definida por:

$$\sigma(\{\Delta(t'), t' \leq s\});$$

(ii) $\widetilde{N}(t) - \widetilde{N}(s)$ tem trajectórias com distribuição de Poisson com parâmetro

$$\Delta(t) - \Delta(s),$$

isto é,

$$Pr(\widetilde{N}(t) - \widetilde{N}(s) = n) = e^{-(\Delta(t)-\Delta(s))}\frac{(\Delta(t) - \Delta(s))^n}{n!}; n = 0, 1, ...$$

Enquanto (i) é fácil de interpretar convém raciocinar sobre o significado de (ii). Esta condição relaciona as trajectórias de $\{\Delta_t; t \geq 0\}$ com as de $\{\widetilde{N}_t; t \geq 0\}$. Dada uma trajectória do primeiro processo ficam determinados os parâmetros dos acréscimos da trajectória correspondente de $\{\widetilde{N}_t; t \geq 0\}$.

Uma medida aleatória difusa $\{\Delta(t); t \geq 0\}$ é *compensadora* $\{\mathcal{A}(t); t \geq 0\}$ do processo de Poisson $\{N(t); t \geq 0\}$ associado ao filtro gerado pela medida, se $\{N(t) - \Delta(t); t \geq 0\}$ for martingala para o mesmo filtro.

Pode mostrar-se, ver Grandell (1990), que o processo de Cox construído a partir dum processo de Poisson usual $\{N(t); t \geq 0\}$ e de uma medida aleatória difusa $\{\Delta(t); t \geq 0\}$ tomando $\widetilde{N}(t) = N \circ \Delta(t), t > 0$, tem $\{\Delta(t); t \geq 0\}$, como compensador relativamente a todo o filtro a que esteja associado.

1.5 Processos de renovação

1.5.1 Processsos de renovação usuais

São processos de contagem em que os intervalos entre acontecimentos $L_1, ...$ são i.i.d. com distribuição F. Ponhamos $M_0 = 0$ bem como $M_n = \sum_{i=1}^{n} L_i$, n=1,... e como

$$N(t) = \sup\{n; M_n \leq t\}$$

Atendendo à lei forte dos grandes números tem-se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} M_n = \mu = \int_0^{+\infty} x dF(x) \leq +\infty$$

com probabilidade um.

Como $\mu > 0$, S_n converge, com probabilidade um, para infinito quando n cresce. Assim ter-se-á $M_n \leq t$, no máximo para um número finito de ocorrências (instantes em que os acontecimentos se verificam). Logo $N(t) < +\infty$ e pode-se escrever

$$N(t) = \max\{n; M_n \leq t\}.$$

Como $N(t) \geq n$ se e só se $\{M_n \leq t\}$, temos

$$\begin{aligned} Pr(N(t) = n) &= Pr(N(t) \geq n) - Pr(N(t) \geq n+1) \\ &= Pr(M_n \leq t) - Pr(M_{n+1} \leq t) \end{aligned}$$

Dado as variáveis $L_1, \ldots$ serem i.i.d. com distribuição F, a distribuição de M_n será a m-ésima potência convolutiva $F^{[m]}$ de F tendo-se

$$\begin{aligned} F^{[1]}(x) &= F(x) \\ F^{[m+1]}(x) &= \int_0^{+\infty} F^{[m]}(x-u) dF(u) = \int_0^{u} F^{[m]}(x-u) dF(u) \end{aligned}$$

visto estas distribuições se anularem à esquerda da origem uma vez que $L_i \geq 0$, i=1,...

Tem-se pois

$$Pr(N(t) = n) = F^{[n]}(t) - F^{[n+1]}(t)$$

A função de renovação é dada por

$$m(t) = E[N(t)]$$

Prova-se, Ross(1996), que

$$m(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{[n]}(t) < +\infty;\ 0 \leq t < +\infty$$

e, que, com $N(\infty) = \lim_{t\to\infty} N(t)$, $Pr(N(\infty) = \infty) = 1$, tem-se ainda

$$\frac{N(t)}{t} \rightarrow_{t\longrightarrow\infty} \frac{1}{\mu}$$

com μ o valor médio das variáveis $L_1, \ldots$.

Igualmente, ver Ross (1996) a distribuição limite de

$$Z(t) = \frac{N(t) - t/\mu}{\sigma\sqrt{t/\mu^3}}$$

onde σ é o desvio padrão das variáveis $L_1, \ldots$, é a distribuição normal reduzida.

Uma variável X é *recticular* se existir $d \geq 0$ tal que

$$\sum_{n=0}^{\infty} Pr(X = nd) = 1$$

isto é, se X apenas tomar valores múltiplos de d. O maior valor de "d"para o qual se verifica a última expressão é o período de X. As distribuições de variáveis reticulares serão reticulares.

Tem-se, Ross(1996),

Teorema de Blackwell

a) se a distribuição F das variáveis $L_1, ...$ não for recticular, $\forall a \geq 0$

$$\lim_{t \to \infty} (m(t+a) - m(t)) = \frac{a}{\mu}$$

b) se a distribuição F das variáveis $L_1, ...$ for recticular com período d, tem-se

$$\lim_{n\to\infty} \text{E}[N^o \text{ de acontecimentos antes de nd}] = \tfrac{d}{\mu}$$

Dada a função h(t) definida em $[0, \infty]$, sejam $\underline{m}_n(a)$ e $\overline{m}_n(a)$ o ínfimo e o supremo de h(t) no intervalo $[(n-1)a; na]$.

A função h(.) é directamente integrável à Riemann se as séries $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{m}_n(a)$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \underline{m}_n(a)$ convergirem e se

$$\lim_{a \longrightarrow 0} a \sum_{n=1}^{\infty} \overline{m}_n(a) = \lim_{a \longrightarrow 0} a \sum_{n=1}^{\infty} \underline{m}_n(a).$$

Para que h(t) seja directamente integrável à Riemann basta que

- h(t)≥ 0 caso $t \geq 0$;
- h(t) seja não crescente;
- $\int_0^{+\infty} h(t)dt < +\infty$

Estas funções intervêm no importante

Teorema chave dos processos de renovação (Ross (1996))

Se F(.) não for recticular e h(.) for directamente integrável à Riemann,

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t h(t-x)dm(x) = \frac{1}{\mu}\int_0^t h(t)dt$$

Recorde-se que $m(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{[n]}(x)$ e, como as variáveis $L_1, ...,$ são não negativas

$$\mu = \int_0^{+\infty}(1 - F(x))dx.$$

Este teorema é útil pois se para um valor médio ou uma probabilidade, g(t) dependente do tempo se tiver uma equação de renovação da forma

$$g(t) = h(t) + \int_0^{+\infty} h(t-x)dm(x)$$

com h(.) directamente integrável à Riemann tem-se o valor limite

$$g(\infty) = h(\infty) + \frac{1}{\mu}\int_0^{+\infty} h(t)dt$$

Para obter a equação de renovação, começa-se por condicionar o valor médio ou a probabilidade no tempo da última ocorrência descondicionando-se em seguida. Pode-se ainda utilizar este teorema Ross (1996) para, dada uma equação de renovação da forma

$$g(t) = h(t) + \int_0^t g(t-x)dF^{\bullet}(x)$$

onde h(t) é conhecida e $F^{\bullet}(x)$ é uma distribuição também conhecida (não necessáriamente igual a F(x)), mostrar que

$$\lim_{t\to\infty} g(t) = \frac{\int_0^{+\infty} h(x)dx}{\int_0^{+\infty}(1 - F^{\bullet}(x))dx}$$

Se estiver definido o valor médio $\mu^\bullet$ para $F^\bullet$ ter-se-á

$$\lim_{t\to\infty} g(t) = \frac{1}{\mu^\bullet}\int_0^{+\infty} h(x)dx$$

Além disso, Ross (1996), a solução da última equação de renovação é dada por

$$g(t) = h(t) + \int_0^t h(t-x)dm^\bullet(x)$$

com $m^\bullet(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{\bullet^{[n]}}(x)$.

1.6 O tratado de resseguro Excess of Loss

O resseguro pode ser entendido como o seguro das seguradoras. Este pode ser facultativo, obrigatório ou facultativo/obrigatório, consoante, seja efectuado apólice a apólice para um determinado risco especifico e não exista nenhuma obrigação de cessão desse risco, seja estabelecido mediante um tratado entre a seguradora e a resseguradora com aceitação obrigatória e preveja a cessão de todos os riscos ou a sua cessação seja facultativa, mas a sua aceitação obrigatória, respectivamente.

De entre os resseguros obrigatórios, tem-se o proporcional e o não proporcional, entre estes últimos encontra-se, o *Excess of Loss.*

Neste tratado a seguradora determina qual o montante a reter em qualquer indemnização que ocorra. As perdas em excesso da retenção são assumidas pela resseguradora. A responsabilidade da resseguradora está habitualmente limitada a um determinado montante por cada perda individual. Quando esta situação ocorre, a seguradora efectua um segundo tratado excess of loss. Quando tal limite para a resseguradora não existe, a parte retida de cada indemnização X é, para um determinado limite de retenção M, $h(X)$, dada por o valor da indemnização X se esta não for superior a M, e no caso contrário por M.

A resseguradora é responsável apenas pela parte que excede M, se a indemnização exceder M, isto é, X-h(X):

$$Máx\{0, X-M\} = \begin{cases} 0 & ; X \leq M \\ X-M & ; X > M \end{cases} \tag{1.6.11}$$

Designamos por P(x) e $P_M(x)$ as funções de distribuição das variáveis aleatórias, X e h(X), respectivamente.

A função de distribuição de h(X), $P_M(x)$ é dada por:

$$P_M(x) = \begin{cases} P(x) & ; X < M \\ 1 & ; X \geq M \end{cases} \tag{1.6.12}$$

O k-ésimo momento em relação à origem das indemnizações retidas, $a_k(M)$

$$\begin{aligned} a_k(M) &= E[(h(X))^k] \\ &= \int_0^M x^k dP(x) + M^k(1-P(M)) \\ &= k\int_0^M x^{k-1}(1-P(x))dx \end{aligned}$$

O valor esperado retido obtém-se da expressão anterior quando k=1,

$$a_1(M) = E[h(X)] = \int_0^M (1-P(x))dx.$$

Nas indemnizações particulares cedidas, o k-ésimo momento é obtido por:

$$\overline{a}_k(M) = k\int_M^{\infty}(x-M)^{k-1}(1-P(x))dx$$

O valor esperado $E[X] = a_1$ obtém-se de, $a_1(M) + \overline{a}_1(M)$.

As indemnizações agregadas retidas e cedidas,

$$\sum_{i=0}^{N} min\{X_i, M\} \quad e \quad \sum_{i=0}^{N} máx\{0, X_i - M\}\ ,$$

têm distribuição composta, obtida a partir, da distribuição do número de sinistros e das distribuições das indemnizações particulares retidas e cedidas, $P_M(x)$ e P(x+M) respectivamente.

2 Fórmula e desigualdade de Lundberg

2.1 Modelo clássico

Neste modelo admite-se que, sendo S(t) o total dos sinistros até ao instante t, $\{S(t); t \geq 0\}$ é um processo de Poisson Composto e que os prémios são cobrados a uma taxa constante c.

Partindo-se de uma provisão inicial u_0, a provisão no instante t será

$$U(t) = u_0 + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i$$

sendo as $Z_1, ...$ variáveis i.i.d. cujas realizações são os valores, positivos dos sinistros. Assim sendo F a distribuição destas variáveis ter-se-á F(0)=0.

O processo $\{X(t); t \geq 0\}$, $X(t) = ct - \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i$ com $\sum_{i=1}^{0} Z_i = 0$, será um processo de risco. Consideremos $S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i$.

Sendo λ a intensidade do processo de Poisson $\{N(t); t \geq 0\}$, ter-se-á

$$E(X(t)) = ct - E(S(t)) = ct - \lambda t E(Z) = (c - \lambda\mu)t$$

com $\mu = E(Z)$. Observe-se que E(X(t)) será o lucro esperado no intervalo [0,t].

A carga de segurança é definida como sendo

$$\theta = \frac{c - \lambda\mu}{\lambda\mu} = \frac{c}{\lambda\mu} - 1$$

podendo ser interpretada como a diferença para um do quociente daquilo que se espera receber por aquilo que se espera pagar, por unidade de tempo. Como no caso dum intervalo de duração h esse quociente seria

$$\frac{ch}{\lambda h\mu} = \frac{c}{\lambda\mu},$$

vê-se que θ não depende da duração do intervalo que se considere.

Um processo de risco $\{X(t); t \geq 0\}$ tem carga de segurança positiva se $\theta > 0$, então E(X(t)) e E(U(t)) tenderão para $+\infty$.

Interessa-nos agora considerar a probabilidade e o tempo de ruína. Para $u_0 = u$ ter-se-á a probabilidade de ruína $\Psi(u) = Pr\{u + X(t) < 0$, para algum $t > 0\}$, sendo o tempo de ruína dado por

$$T = \inf\{t; u + X(t) < 0\}$$

tendo-se

$$\Psi(u) = Pr(T < +\infty)$$

Simetricamente, podemos considerar a probabilidade de sobrevivência

$$\Phi(u) = 1 - \Psi(u) = Pr(T = +\infty)$$

Para calcularmos $\Phi(u)$ observamos que l_1 e Z_1 são independentes com distribuições $E(l|\lambda) = 1 - e^{-\lambda l}, l > 0$, e F(z). Se o primeiro sinistro z_1 ocorrer no instante l_1 a provisão, nesse instante, passa a ser $u + cl_1 - z_1$, havendo ruína se $z_1 > u + cl_1$ e, caso contrário, passando a probabilidade de sobrevivência a ser $\Phi(u + cl_1 - z_1)$. Podemos descondicionar primeiro em ordem a z_1 e depois em ordem a l_1 para obter

$$\Phi(u) = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda l_1} \int_0^{u+cl_1} \Phi(u + cl_1 - z_1)dF(z_1)dl_1$$

Fazendo a mudança de variável $x = u + cl_1$ obtemos

$$\Phi(u) = \frac{\lambda}{c} e^{\frac{\lambda u}{c}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\lambda x}{c}} \int_0^x \Phi(x-z)dF(z)dx,$$

logo $\Phi(u)$ é derivável, tendo-se

$$\Phi'(u) = \frac{\lambda}{c}\Phi(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \Phi(u-z)dF(z)$$

pelo que,

$$\begin{aligned}
\Phi(t) - \Phi(0) &= \frac{\lambda}{c}\int_0^t \Phi(u)du + \frac{\lambda}{c}\int_0^t \int_0^u \Phi(u-z)d(1-F(z))du \\
&= \frac{\lambda}{c}\int_0^t \Phi(u)du + \frac{\lambda}{c}\int_0^t ([\Phi(u-z)(1-F(z))]_{z=0}^u - \\
&- \int_0^u (\frac{d}{dz}\Phi(u-z)(1-F(z))dz)du \\
&= \frac{\lambda}{c}\int_0^t \Phi(u)du + \frac{\lambda}{c}[\int_0^t (\Phi(0)(1-F(u)) - \Phi(u).1)du- \\
&- \int_0^t \int_0^u (\frac{d}{dz}\Phi(u-z))(1-F(z))dzdu] \qquad (2.1.13)
\end{aligned}$$

Ora $\frac{d}{dz}\Phi(u-z) = -\frac{d}{du}\Phi(u-z)$ e

$$\begin{aligned}
-\int_0^t (\int_0^u \frac{d}{dz}\Phi(u-z)(1-F(z))dz)du &= \int_0^t (\int_0^u \frac{d}{du}\Phi(u-z)(1-F(z))dz)du \\
&= \int_0^t (1-F(z)) \int_z^t \frac{d}{du}\Phi(u-z)dudz \\
&= \int_0^t [1-F(z)](\Phi(t-z) - \Phi(0))dz
\end{aligned}$$

obtendo-se por substituição

$$
\begin{aligned}
\Phi(t)-\Phi(0) &= \frac{\lambda}{c}[\Phi(0)\int_0^t (1-F(u))du + \int_0^t (1-F(z))(\Phi(t-z)-\Phi(0))dz] \\
&= \frac{\lambda}{c}\int_0^t (1-F(z))\Phi(t-z)dz \\
&= \frac{\lambda}{c}\int_0^{+\infty} J_{[0,t]}(z)(1-F(z))\Phi(t-z)dz \qquad (2.1.14)
\end{aligned}
$$

Ora

$$0 \leq J_{[0,t]}(z)(1-F(z))\Phi(t-z) \leq 1-F(z), \forall t$$

logo, atendendo ao teorema da convergência dominada

$$\Phi(t)-\Phi(0) \to \Phi(\infty)-\Phi(0) = \frac{\lambda}{c}\Phi(\infty)\int_0^{+\infty}(1-F(z))dz = \frac{\lambda\mu}{c}\Phi(\infty) \quad (2.1.15)$$

visto ter-se

$$J_{[0,t]}(z)(1-F(z))\Phi(t-z) \to_{t\longrightarrow\infty} (1-F(z))\Phi(\infty)$$

e

$$\int_0^{+\infty}(1-F(z))dz = \mu$$

Atendendo à lei forte dos grandes números tem-se com probabilidade um.

$$\frac{X(t)}{t} = c - \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{N(t)} Z_i \longrightarrow_{t\longrightarrow\infty} c-\lambda\mu$$

Assim, se o processo tiver carga positiva $c-\lambda\mu>0$, existirá T' variável aleatória tal que, com probabilidade 1, $X(t)>0$ para $t>T'$. Como até T' apenas pode ocorrer um número finito de sinistros tem-se

$$Pr(\inf_{t>0} X(t) > -\infty) = 1$$

logo $\Phi(\infty) = 1$ o que por substituição em (2.1.15) dá

$$1 = \Phi(0) + \frac{\lambda\mu}{c}$$

vindo

$$\Psi(0) = \frac{\lambda\mu}{c} = \frac{1}{1+\theta} \tag{2.1.16}$$

o que mostra que $\Psi(0)$ é função de θ logo, a distribuição F, apenas intervém através do seu valor médio.

Vejamos agora um exemplo de aplicação. Admitamos que os sinistros têm densidade exponencial $\frac{1}{\mu}e^{-\frac{z}{\mu}}, z > 0$. Tem-se então

$$\begin{aligned}
\Phi'(u) &= \frac{\lambda}{c}\Phi(u) - \frac{\lambda}{c\mu}\int_0^u \Phi(u-z)e^{-\frac{z}{\mu}}dz \\
&= \frac{\lambda}{c}\Phi(u) - \frac{\lambda}{c\mu}\int_0^u \Phi(v)e^{-\frac{(u-v)}{\mu}}dv \\
&= \frac{\lambda}{c}\Phi(u) - \frac{\lambda}{c\mu}e^{-\frac{u}{\mu}}\int_0^u \Phi(v)e^{\frac{v}{\mu}}dv,
\end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned}
\Phi''(u) &= \frac{\lambda}{c}\Phi'(u) + \frac{\lambda}{c\mu^2}e^{-\frac{u}{\mu}}\int_0^u \Phi(v)e^{\frac{v}{\mu}}dv - \frac{\lambda}{c\mu}e^{-\frac{u}{\mu}}\Phi(u)e^{\frac{u}{\mu}} \\
&= \frac{\lambda}{c}[\Phi'(u) - \frac{1}{\mu}\Phi(u)] + \frac{1}{\mu}(\frac{\lambda}{c}\Phi(u) - \Phi'(u)) \\
&= (\frac{\lambda}{c} - \frac{1}{\mu})\Phi'(u) \\
&= -\frac{\theta}{\mu(1+\theta)}\Phi'(u)
\end{aligned}$$

vindo, primeiro

$$\Phi'(u) = c_2 e^{-\frac{\theta}{\mu(1+\theta)}u}$$

e, em seguida

$$\Phi(u) = c_1 - \frac{c_2\mu(1+\theta)}{\theta} e^{-\frac{\theta}{\mu(1+\theta)}u}$$

Como $\Phi(+\infty) = 1$ tem-se $c_1 = 1$ e como $\Phi(0) = 1 - \Psi(0) = 1 - \frac{1}{1+\theta}$ tem-se

$$\frac{c_2\mu(1+\theta)}{\theta} = \frac{1}{1+\theta}$$

vindo

$$\begin{aligned} \Phi(u) &= 1 - \frac{1}{1+\theta} e^{-\frac{\theta}{\mu(1+\theta)}u} \\ \Psi(u) &= \frac{1}{1+\theta} e^{-\frac{\theta}{\mu(1+\theta)}u} \end{aligned}$$

Regressando ao caso geral, temos

$$\begin{aligned} \Phi(u) &= 1 - \Psi(u) \\ &= \Phi(0) + \frac{\lambda}{c}\int_0^u (1 - F(z))\Phi(u-z)dz \\ &= 1 - \frac{\lambda\mu}{c} + \frac{\lambda}{c}\int_0^u (1 - \psi(u-z))(1 - F(z))dz \\ &= 1 - \frac{\lambda\mu}{c} + \frac{\lambda}{c}\int_0^u (1 - F(z))dz - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \Psi(u-z)(1 - F(z))dz \end{aligned}$$

vindo

$$\Psi(u) = \frac{\lambda}{c}[\int_u^{+\infty} (1 - F(z))dz + \int_0^u (1 - F(z))\Psi(u-z)dz] \qquad (2.1.17)$$

já que

$$\mu = \int_0^{+\infty} (1 - F(z))dz$$

Admitamos, seguindo Feller (1971), que existe $R > 0$ tal que

$$f^{\bullet}(z) = \frac{\lambda}{c} e^{Rz}(1 - F(z)) > 0$$

é densidade. Representando por $F^\bullet(z)$ a distribuição correspondente, obtém-se a equação de renovação

$$e^{Ru}\Psi(u) = \frac{\lambda}{c}e^{Ru}\int_u^{+\infty}(1-F(z))dz + \frac{\lambda}{c}\int_0^u e^{R(u-z)}\Psi(u-z)e^{Rz}(1-F(z))dz$$

que, tomando

$$\begin{aligned} g(u) &= e^{Ru}\Psi(u) \\ h(u) &= \frac{\lambda}{c}e^{Ru}\int_u^{+\infty}(1-F(z))dz \end{aligned}$$

pode ser reescrita como

$$g(u) = h(u) + \int_0^{+\infty} g(u-x)dF^\bullet(x) ,$$

logo

$$\lim_{u\to\infty} e^{Ru}\Psi(u) = \lim_{u\to\infty} g(u) = \frac{1}{\mu^\bullet}\int_0^{+\infty} h(u)du = \frac{1}{\mu^\bullet}\int_0^{+\infty}\frac{\lambda}{c}e^{Ru}\int_u^{+\infty}(1-F(z))dzdu ,$$

com

$$\mu^\bullet = \int_0^{+\infty} uf^\bullet(u)du = \frac{\lambda}{c}\int_0^{+\infty} ue^{Ru}(1-F(u))du .$$

A constante R que introduzimos para definir a densidade $f^\bullet(.)$ é o expoente de Lundberg.

Para calcular R observamos que, dado $f^\bullet(.)$ ser densidade, se tem integrando por partes, dado $d(1-F(z)) = -dF(z)$

$$\frac{c}{\lambda} = \int_0^{+\infty} e^{Rz}(1-F(z))dz = [\frac{1}{R}e^{Rz}(1-F(z))]_0^{+\infty} + \frac{1}{R}\int_0^{+\infty} e^{Rz}dF(z) = -\frac{1}{R}+\frac{1}{R}\varphi(R)$$

com $\varphi(.)$ a função geradora de momentos de F(.).

Assim, o expoente de Lundberg é a solução positiva da equação

$$\varphi(R) = 1 + \frac{cR}{\lambda}$$

Vamos agora obter o limite de Cramer Lundberg.

Trocando a ordem de integração pelo teorema de Fubini, chega-se a

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda}{c}\int_0^{+\infty} e^{Ru}\int_u^{+\infty}(1-F(z))dzdu &= \frac{\lambda}{c}\int_0^{+\infty}(1-F(z))\int_0^{z} e^{Ru}dudz \\
&= \frac{\lambda}{c}\int_0^{+\infty}(1-F(z))\frac{1}{R}(e^{Rz}-1)dz \\
&= -\frac{\lambda}{Rc}\int_0^{+\infty}(1-F(z))dz+\frac{\lambda}{Rc}\int_0^{+\infty} e^{Rz}(1-F(z))dz \\
&= -\frac{\lambda\mu}{Rc}+\frac{\lambda}{Rc}\frac{c}{\lambda} \\
&= \frac{1}{R}(1-\frac{\lambda\mu}{c}) \\
&= \frac{1}{R}\frac{\theta}{\theta+1}
\end{aligned}$$

Ora,

$$\varphi'(u)=\int_0^{+\infty} ze^{uz}dF(z)$$

vindo $\varphi'(R)=\int_0^{+\infty} ze^{Rz}dF(z)$ e, por outro lado tem-se o integral indefinido

$$\int ze^{Rz}dz=(\frac{z}{R}-\frac{1}{R^2})e^{Rz}$$

o que nos permite obter, integrando novamente por partes,

dado d(1-F(z))= - dF(z),

$$\begin{aligned}
\mu^{\bullet} &= \frac{\lambda}{c}\int_0^{+\infty} ze^{Rz}(1-F(z))dz \\
&= \frac{\lambda}{c}([(\frac{z}{R}-\frac{1}{R^2})e^{Rz}(1-F(z))]_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}(\frac{z}{R}-\frac{1}{R^2})e^{Rz}dF(z)) \\
&= \frac{\lambda}{c}(\frac{1}{R^2}+\frac{1}{R}\varphi'(R)-\frac{\varphi(R)}{R^2}),
\end{aligned}$$

Ora $\varphi(R) = 1 + \frac{cR}{\lambda}$, logo

$$\begin{aligned} \mu^\bullet &= \frac{\lambda}{c}(\frac{1}{R}\varphi'(R) - \frac{c}{\lambda R}) \\ &= \frac{\lambda\mu}{c}\frac{1}{R}\frac{1}{\mu}(\varphi'(R) - \frac{c}{\lambda}) \\ &= \frac{1}{1+\theta}\frac{1}{R}\frac{1}{\mu}(\varphi'(R) - \frac{c}{\lambda}) \end{aligned}$$

logo, obtém-se o limite pretendido

$$\lim_{u \longrightarrow \infty} e^{Ru}\Psi(u) = \frac{1}{\mu^\bullet}\int_0^{+\infty} h(u)du = \frac{\mu\theta}{\varphi'(R) - \frac{c}{\lambda}}$$

Regressemos ao caso particular, em que os sinistros têm *densidade exponencial* $\frac{1}{\mu}e^{-\frac{z}{\mu}}$. Tem-se então

$$\varphi(u) = \frac{1}{\mu}\int_0^{+\infty} e^{uz}e^{-\frac{z}{\mu}}dz = \frac{1}{1-u\mu}; u < \frac{1}{\mu}$$

logo $\varphi(u) = \frac{1}{1-u\mu}$ e $R = \frac{\theta}{\mu(1+\theta)}$.

Vê-se ainda que,

$\varphi'(u) = \mu(1-u\mu)^{-2}$ vindo $\varphi'(R) = \mu(1-R\mu)^{-2} = \mu(1+\theta)^2$, bem como

$$\lim_{u \to \infty} e^{Ru}\Psi(u) = \frac{\mu\theta}{\mu(1+\theta)^2 - \frac{c}{\lambda}} = \frac{\theta}{(1+\theta)^2 - (1+\theta)} = \frac{1}{1+\theta}$$

que era o limite pretendido.

2.2 Aplicação de Martingalas ao modelo clássico

Considere-se um processo $\{Y(t); t > 0\}$ tal que:

(i) Y(0)=0

(ii) os acréscimos são estacionários e independentes

(iii) $\varphi(r,t) = E(e^{-rY(t)})$ está definida para $r < \overline{r}$ com $\overline{r} > 0$;

Atendendo a (i) e (ii) tem-se

$$\begin{aligned} E(Y(t_1+t_2)) &= E(Y(t_1+t_2) - Y(t_1) + Y(t_1) - Y(0)) \\ &= E(Y(t_1+t_2) - Y(t_1)) + E(Y(t_1) - Y(0)) \\ &= E(Y(t_2) - Y(0)) + E(Y(t_1) - Y(0)) \\ &= E(Y(t_2)) + E(Y(t_1)), \end{aligned}$$

logo, $m^\bullet(t) = E(Y(t))$ satisfaz a equação funcional aditiva

$$m^\bullet(t_1+t_2) = m^\bullet(t_1) + m^\bullet(t_2)$$

tendo-se, Parzen (1965)

$$m^\bullet(t) = t\beta\ ,$$

admitamos que $\beta > 0$.

Por outro lado, com $r < \overline{r}$, tem-se, ainda devido a (i) e (ii)

$$\begin{aligned} \varphi(r, t_1+t_2) &= E(e^{-rY(t_1+t_2)}) \\ &= E(e^{-r(Y(t_1+t_2)-Y(t_1)+Y(t_1)-Y(0))}) \\ &= E(e^{-r(Y(t_1+t_2)-Y(t_1))}.e^{-r(Y(t_1)-Y(0))}) \\ &= E(e^{-r(Y(t_1+t_2)-Y(t_1))}).E(e^{-r(Y(t_1)-Y(0))}) \\ &= E(e^{-rY(t_2)})E(e^{-rY(t_1)}) \\ &= \varphi(r,t_2).\varphi(r,t_1), \end{aligned}$$

logo $\varphi^\bullet(t|r) = \varphi(r,t)$ satisfaz a equação funcional multiplicativa

$$\varphi^\bullet(t_1 + t_2|r) = \varphi^\bullet(t_1|r)\varphi^\bullet(t_2|r)$$

tendo-se, Parzen (1965)

$$\varphi(r,t) = \varphi^\bullet(t|r) = e^{g(r)t}$$

Se Y(t) é um processo de risco com carga positiva tem-se

$$\beta = c - \lambda\mu$$

e, dado que N(t) tem distribuição de Poisson com parâmetro λt

$$\begin{aligned}
\varphi(r,t) &= E(e^{-rY(t)}) \\
&= E(e^{-r(ct-\sum_{i=1}^{N(t)} Z_i)}) \\
&= e^{-rct}E(e^{r\sum_{i=1}^{N(t)} Z_i}) \\
&= e^{-rct}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}E(e^{r\sum_{i=1}^{n} Z_i})
\end{aligned}$$

e como as $Z_1, ...$ são i.i.d. com função geradora de momentos $\varphi_Z(r)$ tem-se

$$E(e^{r\sum_{i=1}^{n} Z_i}) = \varphi_{\sum_{i=1}^{n} Z_i}(r) = \varphi_Z^n(r),$$

vindo

$$\begin{aligned}
\varphi(r,t) &= e^{-rct}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}\varphi_Z^n(r) \\
&= e^{-rct+\lambda t(\varphi_Z(r)-1)} \\
&= e^{t(\lambda\varphi_Z(r)-\lambda-rc)}
\end{aligned}$$

vindo

$$g(r) = \lambda(\varphi_Z(r) - 1) - rc$$

Seja T_u o tempo de ruína para a provisão inicial u, isto é

$$T_u = \inf\{t \geq 0 | u + Y(t) < 0\},$$

tendo-se a probabilidade de ruína

$$\Psi(u) = Pr(T_u < +\infty)$$

Por outro lado, T_u será um tempo de paragem para o filtro $\{\mathcal{A}(t); t \geq 0\}$ gerado por $\{Y(t); t \geq 0\}$ já que, $\forall t > 0, (T_u = t) \in \mathcal{A}(t)$.

Ora,

$$M_u(r,t) = \frac{e^{-r(u+Y(t))}}{e^{tg(r)}},$$

$M_u(r,t)$ é uma martingala relativamente a $\{\mathcal{A}(t); t \geq 0\}$, já que com $s < t$

$$E^{\mathcal{A}(s)}(M_u(r,t)) = E^{\mathcal{A}(s)}(\frac{e^{-r(u+Y(t))}}{e^{tg(r)}}) = E^{\mathcal{A}(s)}(\frac{e^{-r(u+Y(s))}}{e^{sg(r)}} \frac{e^{-r(Y(t)-Y(s))}}{e^{(t-s)g(r)}})$$

e como os acréscimos são independentes e

$$E^{\mathcal{A}(s)}(\frac{e^{-r(u+Y(s))}}{e^{sg(r)}}) = \frac{e^{-r(u+Y(s))}}{e^{sg(r)}} = M_u(r,s)$$

vem

$$E^{\mathcal{A}(s)}(M_u(r,t)) = M_u(r,s).E^{\mathcal{A}(s)}(\frac{e^{-r(Y(t)-Y(s))}}{e^{(t-s)g(r)}}) = M_u(r,s)$$

já que

$$E^{\mathcal{A}(s)}(\frac{e^{-r(Y(t)-Y(s))}}{e^{(t-s)g(r)}}) = \frac{e^{-r(Y(s)-Y(s))}}{e^{(s-s)g(r)}} = 1$$

Dado $t_0 < \infty$, $t_0 \wedge T_u = \min\{t_0, T_u\}$ será um tempo de paragem adapatado a $\{\mathcal{A}(t); t \geq 0\}$ já que $\{t_0 < t\}$ ou é o acontecimento impossível ou o acontecimento certo e, assim, $\forall t$, $\{T_u < t\} \epsilon \mathcal{A}(t)$.

Atendendo ao teorema dos tempos de paragem opcionais, dado

$M_u(r, 0) = e^{-ru}$, tem-se

$$\begin{aligned}
e^{-ru} &= M_u(r, 0) \\
&= E[M_u(r, t_0 \wedge T_u)] \\
&= Pr(T_u \leq t_0) E(M_u(r, t_0 \wedge T_u) | T_u \leq t_0) + \\
&+ Pr(T_u > t_0).E(M_u(r, t_0 \wedge T_u) | T_u > t_0) \\
&\geq Pr(T_u \leq t_0) E(M_u(r, t_0 \wedge T_u) | T_u \leq t_0) \\
&= Pr(T_u \leq t_0) E(M_u(r, T_u) | T_u \leq t_0). \qquad (2.2.18)
\end{aligned}$$

Ora $u + Y(T_u) \leq 0$ (caso $T_u < +\infty$), pelo que

$$M_u(r, T_u) = \frac{e^{-r(u+Y(T_u))}}{e^{T_u g(r)}} > e^{-T_u g(r)}$$

vindo

$$Pr(T_u \leq t_0) \leq \frac{e^{-ru}}{E(M_u(r, T_u) | T_u \leq t_0)} \leq \frac{e^{-ru}}{E(e^{-T_u g(r)} | T_u \leq t_0)} \leq e^{-ru} \sup_{0 \leq t \leq t_0} e^{tg(r)},$$

logo

$$\Psi(u) = \lim_{t_0 \to +\infty} Pr(T_u \leq t_0) \leq e^{-ru} \sup_{t \geq 0} e^{tg(r)}$$

Para tornarmos esta desigualdade tão estrita quanto possível procuramos maximizar r, atendendo à restrição

$$\sup_{t \geq 0} e^{tg(r)} < +\infty$$

o que equivale a tomar

$$r = \sup\{v | g(v) \leq 0\}$$

Ora, no estudo do modelo clássico, vimos que a solução da equação g(R)=0 era o expoente R de Lundberg. Obtemos assim a <u>desigualdade de Lundberg</u>

$$\Psi(u) \leq e^{-Ru}$$

Como o processo tem carga positiva, tem-se com probabilidade 1,

$$\lim_{t_0 \to \infty} e^{-R(u+Y(t_0))} J(T_u > t_0) = 0 \ ,$$

onde J() representa a função indicatriz dum acontecimento. Ora

$$0 < e^{-R(u+Y(t_0))} J(T_u > t_0) < 1$$

pelo que, atendendo ao teorema da convergência dominada tem-se

$$\lim_{t_0 \to \infty} Pr(T_u > t_0) E(e^{-R(u+Y(t_0)} | T_u > t_0) = \lim_{t_0 \to \infty} E(e^{-R(u+Y(t_0))} J(T_u > t_0)) = 0,$$

logo, dado R ser a solução da equação g(R)=0

$$\begin{aligned}
e^{-Ru} &= \lim_{t_0 \to \infty} E(e^{-R(u+Y(T_u))}) \\
&= \lim_{t_0 \to \infty} [Pr(T_u \leq t_0) E(e^{-R(u+Y(t_0))} | T_u \leq t_0)] + Pr(T_u > t_0) E(e^{-R(u+Y(t_0))} | T_u > t_0)] \\
&= \Psi(u) E(e^{-R(u+Y(T_u))} | T_u < \infty)
\end{aligned}$$

vindo

$$\Psi(u) = \frac{e^{-Ru}}{E(e^{-R(u+Y(T_u))}|T_u < \infty)}$$

2.2.1 Processos de renovação usuais

Consideremos agora o caso em que o processo $\{N(t); t \geq 0\}$ do número de sinistros é um processo de renovação. Sendo S_j o instante de ocorrência do j-ésimo sinistro, estamos a admitir que as variáveis $S_j - S_{j-1}, j = 1, ...$ são i.i.d., com distribuição $F^{\bullet}$. Como vimos, se S_1 também tiver distribuição $F^{\bullet}$, $\{N(t); t \geq 0\}$ será um processo de renovação usual. Caso S_1 tenha valor médio $\frac{1}{\lambda}$ e distribuição

$$F(t) = \lambda \int_0^t (1 - F^{\bullet}(s))ds,$$

$\{N(t); t \geq 0\}$ será um processo de renovação estacionário. Estes processos correspondem à definição usual de processos de renovação apresentados na *secção (1.3.1.)*.

Admitamos que $F^{\bullet}$ tem valor médio $\frac{1}{\lambda}$. As variáveis

$$X_j = -[X(S_j) - X(S_{j-1})] = Z_j - c(S_j - S_{j-1}), j = 1, ...$$

serão, dado $S_0 = 0$, i.i.d., logo

$$E(X_j) = E(X_1) = -E(X(S_1)) = E(Z_1 - cS_1) = \mu - \frac{c}{\lambda}$$

o que nos leva a definir a carga de segurança, como

$$\theta = \frac{\frac{c}{\lambda} - \mu}{\mu} = \frac{c - \lambda\mu}{\lambda\mu} = \frac{c}{\lambda\mu} - 1,$$

reobtendo-se a definição dada para o modelo clássico.

Ponhamos $Y_0 = 0$ bem como

$$Y_n = \sum_{j=1}^{n} X_j = -X(S_n),$$

isto é, Y_n é a perda imediatamente após o n-ésimo sinistro.

A probabilidade de ruína em tempo finito continuará a ser dada por

$$\Psi(u) = Pr\{u + X(t) < 0; \text{ para algum t} > 0\}$$

Como $c > 0$ a ruína apenas se poderá dar quando se verificarem sinistros.

Sendo G a distribuição das variáveis $X_1, ...$, representemos por γ o respectivo valor médio, tendo-se

$$\gamma = -\mu\theta$$

A função geradora de momentos de G será

$$\varphi_{X_1}(r) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{rx} dG(x) = E(e^{rX_1}) = E(e^{r(Z_1 - cS_1)}) = E(e^{rZ_1})E(e^{-crS_1})$$

visto Z_1 e S_1 serem independentes. Continuando a representar por $\varphi(r)$ a função geradora de momentos dos sinistros teremos

$$\varphi_{X_1}(r) = \varphi(r)\varphi_{S_1}(-cr)$$

onde φ_{S_1} é a função geradora de momentos dos tempos entre sinistros e de ocorrência do primeiro sinistro, visto estarmos a considerar um processo de renovação usual.

Embora se possam considerar casos em que G(0)=1 isto é, em que $Pr(X_j \leq 0) =$

$1, j = 1, ...$, (por exemplo, tomando $S_n - S_{n-1} = \frac{1}{\lambda}$ e $Z_n = \mu$), os mesmos não têm interesse pelo que admitiremos que $G(0) < 1$.

Por outro lado, continuaremos a admitir que existe $r_\infty \leq +\infty$ tal que

$$\varphi(r) \to_{r \to r_\infty^-} +\infty$$

Como $g(r) = \lambda(\varphi(r) - 1) - cr$ e $\varphi'(0) = \mu$ tem-se

$$g'(0) = \lambda\mu - c = -\lambda\mu\theta < 0$$

e $g''(r) = \lambda\varphi''(r) > 0, 0 < r < r_\infty$. Se $r_\infty < \infty$, vê-se imediatamente que $g(r) \to_{r \to \infty^-} +\infty$. Se $r_\infty = +\infty$, como $G(0) < 1$ e G(.) é continua à direita existirá $x_0 > 0$ tal que $G(x_0) < 1$, vindo

$$\varphi(r) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{rx} dG(x) > \int_{x_0}^{+\infty} e^{rx} dG(x) > e^{rx_0}(1 - G(x_0))$$

logo

$$\begin{aligned} g(r) &= \lambda(\varphi(r) - 1) - cr \\ &\geq \lambda(e^{rx_0}(1 - G(x_0)) - 1) - cr \to_{r \to r_\infty} = +\infty \end{aligned}$$

Vê-se pois que se pode definir o expoente de Lundberg como a solução positiva da equação

$$g(r) = 1$$

Seja $\mathcal{A}_n$ a algebra-σ gerada pelas variáveis aleatórias $Y_1, ..., Y_n$. Podemos considerar $\{\mathcal{A}_n, n = 1, ...\}$ como um filtro com parâmetro discreto n.

Representemos por $N_u^\bullet$ o número de sinistros até à ruína dada a provisão inicial u, tendo-se

$$N_u^\bullet = \min\{n|Y_n > u\}$$

Tal como se tinha quando se utilizava o parâmetro continuo t, $N_u^\bullet$ será um tempo de paragem visto, qualquer que seja n,

$$\{N_u^\bullet \leq n\} \epsilon \mathcal{A}_n$$

Vê-se ainda que

$$\Psi(u) = Pr(N_u^\bullet < +\infty)$$

já que, com probabilidade um, a ruína dá-se ao fim dum tempo finito se e só se for causada por um número finito de sinistros.

Ponhamos

$$M_u(n) = \frac{e^{-r(u-Y_n)}}{g(r)^n}$$

vindo com $m < n$, dado os acréscimos serem independentes

$$\begin{aligned} E^{\mathcal{A}_m}[M_u(n)] &= E^{\mathcal{A}_m}[\frac{e^{-r(u-Y_m)}}{g(r)^m}\frac{e^{r(Y_n-Y_m)}}{g(r)^{n-m}}] \\ &= E^{\mathcal{A}_m}[\frac{e^{-r(u-Y_m)}}{g(r)^m}]E^{\mathcal{A}_m}[\frac{e^{r(Y_n-Y_m)}}{g(r)^{n-m}}] \\ &= \frac{e^{-r(u-Y_m)}}{g(r)^m}E^{\mathcal{A}_m}[\frac{e^{r(Y_n-Y_m)}}{g(r)^{n-m}}] \\ &= M_u(m) \end{aligned}$$

pelo que $\{M_u(n); n \geq 1\}$ será martingala relativamente a $\{\mathcal{A}_n\}$.

Por outro lado, com $n_0 < +\infty$ e $n_0 \wedge N_u = \min\{n_0; N_u\}$, tem-se

$$e^{-ru} = M_u(0) = E(M_u(n_0 \wedge N_u)) \geq Pr(N_u \leq n_0)E(M_u(N_u)|N_u \leq n_0)$$

uma vez que $n_0 \wedge N_u$ é tempo de paragem $\{\mathcal{A}_n\}$ e se pode utilizar o teorema dos tempos de paragem opcionais. Assim

$$Pr(N_u \leq n_0) \leq \frac{e^{-ru}}{E(M_u(N_u)|N_u \leq n_0)}$$

Como $u - Y_{N_u} < 0$, tem-se $M_u(N_u) \geq g(r)^{-N(u)}$ vindo

$$Pr(N_u \leq n_0) \leq \frac{e^{-ru}}{E(g(r)^{-N_u}|N_u \leq n_0)} \leq e^{-ru} \max_{0 \leq n \leq n_0} g(r)^n,$$

fazendo $n_0 \longrightarrow \infty$, obtém-se

$$\Psi(u) = Pr(N_u < \infty) \leq e^{-ru} \max_{n \geq 0} g(r)^n$$

Como g(R)=1, obtém-se de novo a desigualdade de Lundberg

$$\Psi(u) \leq e^{-Ru}$$

Raciocinando-se como na alinea precedente para obter a expressão de $\Psi(u)$, obtemos agora

$$\Psi(u) = \frac{e^{-Ru}}{E(e^{-R(u-Y_{N_u})}|N_u < +\infty)}$$

o que representa um resultado equivalente ao anterior mas formulado agora, em termos, do número de sinistros que causaram a ruína.

2.2.2 Processos de renovação estacionários

Seja agora $\{N(t); t \geq 0\}$ um processo de renovação estacionário. Após o primeiro sinistro o processo passa a comportar-se como um processo de renovação usual. Representemos por $\Psi^{\bullet}(u)$ e $\Phi^{\bullet}(u)$ as probabilidades de ruína e sobrevivência, dada a provisão inicial u para o processo de renovação usual e $\Psi(u)$ e $\Phi(u)$ as mesmas probabilidades mas para o processo estacionário. Tem-se $\Phi(u) = 1 - \Psi(u)$ e $\Phi^\bullet(u) = 1 - \Psi^\bullet(u)$.

Como S_1 tem densidade $K(s) = \alpha(1 - K^\bullet(s))$ para $s \geq 0$, obtemos, raciocinando como atrás

$$\Phi(u) = \int_0^\infty K(s) \int_0^{u+cs} \Phi^\bullet(u + cs - z) dF(z) ds$$

Tal como fizemos para o modelo de risco clássico, derivamos em ordem a u e trocamos a ordem de integração obtendo-se

$$\begin{aligned} \Phi(u) &= \alpha \int_0^\infty (1 - K^\bullet(s)) \int_0^{u+cs} \Phi^\bullet(u + cs - z) dF(z) ds \\ &= \alpha \int_0^\infty \int_s^\infty dK^\bullet(v) \int_0^{u+cs} \Phi^\bullet(u + cs - z) dF(z) ds \\ &= \alpha \int_0^\infty dK^\bullet(v) \int_0^v \int_0^{u+cs} \Phi^\bullet(u + cs - z) dF(z) ds \end{aligned}$$

A substituição x=u+cs dá

$$\Phi(u) = \frac{\alpha}{c} \int_0^\infty dK^\bullet(v) \int_u^{u+cv} \int_0^x \Phi^\bullet(x - z) dF(z) dx \tag{2.2.19}$$

Ora, ver Grandell (1990), pode-se derivar em ordem a u obtendo-se a equação de renovação,

$$\begin{aligned} \Phi'(u) &= \frac{\alpha}{c} \int_0^\infty dK^\bullet(v) \{ \int_0^{u+cv} \Phi^\bullet(u + cv - z) dF(z) - \int_0^u \Phi^\bullet(u - z) dF(z) \} \\ &= \frac{\alpha}{c} \Phi^\bullet(u) - \frac{\alpha}{c} \int_0^u \Phi^\bullet(u - z) dF(z) \end{aligned}$$

Esta igualdade segue(satisfaz) o argumento de renovação aplicado ao caso geral. Integrando $\Phi'(u)$ obtém-se procedendo como para obter (2.1.13) e (2.1.15).

$$\Phi(u) = \Phi^{\bullet}(0) + \frac{\alpha}{c}\int_0^u \Phi^{\bullet}(u-z)(1-F(z))dz \tag{2.2.20}$$

bem como

$$\Phi(\infty) = \Phi^{\bullet}(0) + \frac{\alpha\mu}{c}\Phi^{\bullet}(\infty) \tag{2.2.21}$$

Desde que $\Phi(\infty) = \Phi^{\bullet}(\infty) = 1$, quando $c > \alpha\mu$, tem-se

$$\Psi(0) = \frac{\alpha\mu}{c} = \frac{1}{1+\theta} \tag{2.2.22}$$

quando $c > \alpha\mu$.

Da mesma maneira que de (2.1.14) e (2.1.16) se obtém (2.1.17) obtém-se agora

$$\Psi(u) = \frac{\alpha}{c}\int_u^{\infty}(1-F(z))dz + \frac{\alpha}{c}\int_0^u \Psi^{\bullet}(u-z)(1-F(z))dz \tag{2.2.23}$$

Para chegarmos à desigualdade de Lundberg comece-se por observar que tal como no modelo usual o expoente de Lundberg satisfaz

$$\frac{h(R)}{R} = \int_0^{\infty} e^{Rz}(1-F(z))dz = \frac{c}{\alpha}$$

a equação.

De (2.2.23) e da desigualdade de Lundberg para modelos de renovação usuais obtém-se

$$\begin{aligned}\Psi(u) &\leq \frac{\alpha}{c}\int_u^{\infty}(1-F(z))dz + \frac{\alpha}{c}\int_0^u e^{-R(u-z)}(1-F(z))dz \\ &\leq \frac{\alpha}{c}\int_0^{\infty} e^{-R(u-z)}(1-F(z))dz \\ &= \frac{\alpha}{cR}h(R)e^{-Ru}\end{aligned} \tag{2.2.24}$$

e assim a desigualdade de Lundberg verifica que a constante possa ser maior que um.

Finalmente, considere-se a aproximação de Cramér-Lundberg. Pela convergência dominada obtém-se

$$\begin{aligned}
\lim_{u\to\infty} e^{Ru}\Psi(u) &= \lim_{u\to\infty} \frac{\alpha}{c} e^{Ru} \int_u^\infty (1-F(z))dz + \lim_{u\to\infty} \frac{\alpha}{c} \int_0^u e^{-R(u-z)}\Psi^\bullet(u-z)e^{Ru}(1-F(z))dz \\
&= 0 + \frac{\alpha}{cR} h(R) C^0 =^{def} C,\ 0 < C < \infty
\end{aligned}$$

2.3 Processos de Cox

Consideremos um modelo de Cox onde N é um processo de Cox com processo de intensidade $\lambda(t)$.

A medida de intensidade Λ é dada por

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s)ds$$

Vamos utilizar o lema 3

LEMA 3

Seja Λ a medida aleatória, N é um *processo de Cox correspondente a* Λ se e só se:

(i) N(t) tem incrementos independentes relativamente a $\mathcal{A}_t^\Lambda$;

(ii) N(t)-N(s) tem distribuição de Poisson de intensidade $\Lambda(t) - \Lambda(s)$ relativamente a $\mathcal{A}_t^\Lambda$.

para estabelecer a

PROPOSIÇÃO 4

Seja Λ uma medida aleatória difusa com $E[\Lambda(t)] < \infty$ para cada $t < \infty$ e seja A um filtro dado por $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_t^\Lambda \vee \mathcal{A}_t^N$. Então o "processo de Cox correspondente a Λ"e os "processos de Cox adaptados a A"são conceitos equivalentes.

Seja N um "processo de Cox correspondente a Λ"então

$$E^{\mathcal{A}_t^\Lambda \vee \mathcal{A}_s^N}[N(t) - N(s)] = \Lambda(t) - \Lambda(s)$$

e usando o pressuposto de $E[\Lambda(t)] < \infty$ uma vez que Λ é uma martingala em $\mathcal{A}$ e é um compensador de N. Desde que Λ seja mensurável em $\mathcal{A}_t^\Lambda$ por definição, vem que N é um *processo de Cox relativamente a A*.

Dem PROPOSIÇÃO 4: Basta observar que (i) e (ii) são equivalentes a (ii) com "relativamente a $\mathcal{A}_t^\Lambda$"substituído por "relativamente a $\mathcal{A}_t^\Lambda \vee \mathcal{A}_s^N$".

Parece natural tentar encontrar uma martingala relativamente a $\mathcal{A}$"tão fechada quanto possível"para ser usada nos casos da Poisson.

Portanto consideremos

$$M(t) = \frac{e^{-r(u+N(t))}}{e^{\Lambda(t)h(r)-trc}}, \tag{2.3.25}$$

onde se substituiu αt por $\Lambda(t)$. Estabeleçamos o seguinte lema

LEMA O processo $\{M(t); t \geq 0\}$ é uma martingala relativamente a $\mathcal{A}$ onde o filtro $\mathcal{A}$ é dado por $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_t^\Lambda \vee \mathcal{A}_t^N$.

Dem: O facto de N, e consequentemente X, terem incrementos independentes relativamente a $\mathcal{A}_t^\Lambda$ é equivalente a $X(t) - X(s)$, para $s \leq t$ ser independente a

$\mathcal{A}_s$ relativamente a $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_t^{\Lambda}$. Como

$$\begin{aligned} E^{\mathcal{A}_\infty^\Lambda}[e^{-rX(t)}] &= e^{-rct}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Lambda(t)^k}{k!}e^{-\Lambda(t)}(h(r)+1)^k \\ &= e^{-rct+\Lambda(t)(h(r)+1)-\Lambda(t)} \\ &= e^{\Lambda(t)h(r)-rct} \end{aligned}$$

da secção (2.2) vem:

$$\begin{aligned} E^{\mathcal{A}_s}[M(t)] &= E^{\mathcal{A}_s}[\frac{e^{-r(u+X(t))}}{e^{\Lambda(t)h(r)-rct}}] \\ &= E^{\mathcal{A}_s}[\frac{e^{-r(u+X(s))}}{e^{\Lambda(s)-rcs}}.\frac{e^{-r(X(t)-X(s))}}{e^{\Lambda(t)-\Lambda(s)-(t-s)rc}}] \\ &= M(s).E^{\mathcal{A}_s}[\frac{e^{-r(X(t)-X(s))}}{e^{\Lambda(t)-\Lambda(s)-(t-s)rc}}] \\ &= M(s) \end{aligned}$$

pelo que $\{M(t); t \geq 0\}$ é uma martingala.

Obtém-se um limite inferior para $E^{\mathcal{A}_0}[M(T_u)|T_u \leq t_0]$ a partir de $u + X(T_u) \leq 0$ e de $\{T_u < \infty\}$ vem

$$E^{\mathcal{A}_0}[M(T_u)|T_u \leq t_0] \geq E^{\mathcal{A}_0}[e^{-(\Lambda(T_u)h(r)-rcT_u)}|T_u \leq t_0] \geq inf_{\ 0\leq t\leq t_0}\ e^{-\Lambda(t)h(r)+rct}$$

Seguindo uma dedução idêntica à da secção (2.2) pg 41 obtemos

$$Pr^{\mathcal{A}_0}\{T_u \leq t_0\} \leq \frac{M(0)}{E^{\mathcal{A}_0}[M(T_u)|T_u \leq t_0]} \leq e^{-ru} sup_{\ 0\leq t\leq t_0}\ e^{\Lambda(t)h(r)-rct}$$

logo, tomando valores médios,

$$Pr\{T_u \leq t_0\} \leq e^{-ru}E[sup_{\ 0\leq t\leq t_0}\ e^{\Lambda(t)h(r)-rct}]$$

Quando $t_0 \to \infty$ a expressão anterior dá $\Psi(u) \leq C(r)e^{-ru}$, onde

$$C(r) = E[sup_{\ t\geq 0}\ e^{\Lambda(t)h(r)-rct}] \tag{2.3.26}$$

Pretende-se r tão grande quanto possível, o que nos conduz à seguinte definição do *expoente de Lundberg*

DEFINIÇÃO O expoente de Lundberg R é definido por

$$R = sup\{r|C(r) < \infty\}$$

onde C(r) é dado por (2.3.26).

Tem-se ainda a generalização dada por

Teorema Para qualquer $\epsilon > 0$ tal que $0 < \epsilon < R$ tem-se

$$\Psi(u) \leq C(R-\epsilon)e^{-(R-\epsilon)u},$$

onde $C(R-\epsilon) < \infty$.

2.4 Uma aplicação ao resseguro

Como se pode ver (pg's 35, 47 e 49) o expoente de Lundberg R, é sempre o valor de r$>$ 0 tal que

$$f^{\bullet}(z) = \frac{\lambda}{c}e^{rz}(1-F(z)) \tag{2.4.27}$$

é uma densidade. Assim, este expoente depende apenas da distribuição dos sinistros e não do processo estocástico (Poisson, renovação e renovação estacionário). Ora, para o processo de Poisson tem-se o seguinte teorema, ver Egídio dos Reis (1999)

Teorema Consideremos as hipóteses:

- Princípio do valor esperado para cálculo do prémio do segurador e do ressegurador;

- O ressegurador calcula o prémio utilizando a mesma carga θ independentemente do tipo de tratado;

- A carga do segurador cedente é também igual a θ;

- O prémio líquido de resseguro é: $c(h) = (1+\theta)\lambda \int_0^{+\infty} h(x)p(x)dx$;

- A função geradora de momentos de h(X) é $M_h(r) = \int_0^{\infty} e^{rh(x)}p(x)dx$;

- O coeficiente de ajustamento pós-resseguro, R(h), é obtido pela equação

$$\lambda + c(h)R(h) = \lambda M_h(R(h)) \tag{2.4.28}$$

- Consideremos o tratado *Excess of loss* com retenção M de forma que a sua média seja igual à média de h(X):

$$\int_0^M x\, p(x)dx + M[1 - P(M)] = \int_0^{\infty} h(x)p(x)dx \tag{2.4.29}$$

  M existe e é única.

  $0 \leq \int_0^{\infty} h(x)p(x)dx \leq a_1$ porque $0 \leq h(x) \leq x$ e fazendo variar M de 0 a ∞, o montante esperado das indemnizações particulares líquidas de resseguro aumentam de 0 para a_1.

  Portanto, o prémio c(M) será igual a c(h);

- Seja ainda

$$M_e(r) = \int_0^M e^{rx}p(x)dx + e^{rM}[1 - P(M)]$$

e seja R(M) o respectivo coeficiente de ajustamento.

então

$$R(M) \geq R(h)$$

Dem: Sejam

$$g_h(r) = \lambda M_h(r) - \lambda - cr \quad e \quad g_e(r) = \lambda M_e(r) - \lambda - cr$$

Se provarmos que $g_h(r) \geq g_e(r)$ fica provado o teorema. Para isso basta provar que $M_h(r) \geq M_e(r)$.

Sabemos que $e^z \geq 1 + z \quad \forall z$.

Seja e(x), o pagamento do segurador sob *Excess of loss* dado por

x, se x $\leq$ M e, por M quando x > M.

Então, $exp\{r[h(x) - e(x)]\} \geq 1 + r[h(x) - e(x)]$, o que é equivalente a

$$exp\{rh(x)\} \geq exp\{re(x)\} + r\, exp\{r\, e(x)\}[h(x) - e(x)].$$

Multiplicando por p(x) e integrando em $(0, \infty)$, temos

$$M_h(r) \geq M_e(r) + r \int_0^\infty \exp\{re(x)\}[h(x) - e(x)]p(x)dx$$

O resultado fica provado se demonstrarmos que o integral no segundo membro é não negativo. O integral vem

$$(\int_0^M + \int_M^\infty) exp\{re(x)\}[h(x) - e(x)]p(x)dx$$

Em (0,M), e(x)=x e $h(x) \leq x \Longrightarrow h(x) - e(x) \leq 0$.

Além disso, $exp\{r\ e(x)\} \leq exp\{rM\}$, portanto

$$\begin{aligned}\int_0^M exp\{r\ e(x)\}[h(x) - e(x)]p(x)dx &\geq \int_0^M exp\{rM\}[h(x) - e(x)]p(x)dx \\ &= exp\{r\ M\} \int_0^M [h(x) - e(x)]p(x)dx\end{aligned}$$

Por outro lado, e(x)=M para $x \geq M$, portanto

$$\begin{aligned}\int_M^\infty exp\{r\ e(x)\}[h(x) - e(x)]p(x)dx &= exp\{rM\} \int_M^\infty [h(x) - e(x)]p(x)dx \\ \Longrightarrow \int_0^\infty exp\{re(x)\}[h(x) - e(x)]p(x)dx &\geq exp\{rM\} \int_0^\infty [h(x) - e(x)]p(x)dx = 0\end{aligned}$$

por (2.4.29).

Substituindo a hipótese do cálculo do coeficiente de ajustamento R(h), obtido como solução da equação (2.4.28) por (2.4.27), obtém-se uma generalização deste teorema.

A nossa observação anterior permite generalizar directamente este resultado aos outros modelos com excepção dos modelos de Cox.

Pretendemos vir a estudar a extensão a esses modelos.

Conclusão

Mostrámos como utilizar os resultados da teoria dos processos estocásticos para desenvolver os modelos clássico, de renovação, de renovação estacionária e de Cox.

O nosso tratamento, inspirado em grande medida em Grandell(1990) procurou ser rigoroso, não se restringindo, por exemplo, a distribuíções contínuas para os sinistros, o que implicou a introdução dos integrais de Stieltjes.

No centro do nosso tratamento estiveram a desigualdade e o teorema de Lundberg, tendo a primeira sido estabelecida para todos os modelos, e, a segunda para os três primeiros.

Como consequência do nosso estudo foi possível mostrar que, nos três primeiros modelos, o resseguro excess of loss minimiza o limite de Lundberg para a probabilidade de ruína. Esta propriedade é, em geral, apenas apresentada para o modelo clássico.

Julgamos assim ter desbastado o caminho para posterior estudo da probabilidade de ruína.

Referências

[1] Bartle, Robert G. (1966), *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, Wiley Classics Library, pg.44.

[2] Bowers, N.L., Gerber, H.U., Hickman, J.C., Jones, D.A. & Nesbitt, C.J. (1986),*Actuarial Mathematics*, 1st edn, The Society of Actuaries, Itasca, Illinois, USA.

[3] Casella, G., Berger, Roger L. (1990), *Statistical inference*, Wadsworth & Brooks - Belmont, California McGraw-Hill, pg.123.

[4] Egídio dos Reis, A. D.(1999), *Teoria da Ruína.* CEMAPRE,N17/TA.

[5] Embrechts, P., Grandell, J., Schmidli H. (1993), *Finite-Time Lundberg inequalities in the Cox Case*, Scandinavial Actuarial Journal; 1:17-41.

[6] Feller, William (1966), *An introduction to probability theory and its aplications*, vol II, Second Edition

[7] Gerber, Hans U. (1979), *An introduction to mathematical risk theory*, S.S. Huebner Foundation for insurance Education, University of Pennsylvania, Philadelphia PA

[8] Grandell, Jan (1990), *Aspects of risk theory*, Springer- Verlag, pg.40

[9] Graves, Lawrenc M.(1946), *The theory of functions of real variables.* McGraw-Hill Book Company, INC, First Edition.

[10] Parzen, Emanuel (1965), *Stochastic Processes*, Holden-Day, San Francisco.

[11] Ross, Sheldon M. (1996), *Stochastic Processes*, Second Edition, John Wiley & Sons, inc, pg's.100-107, 105, 110 e 157.

[12] Rolski, T., Schmidli, H., Schmidt, V. & Teugels, J. (1999), *Stochastic Process for Insurance nd Finance*, John Wiley & Sons, inc, pg's. 125, 170 e 416.

[13] Rudin, Walter (1970), *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill

[14] Williams, David (1990), *Probability with Martingales*, Cambridge University, pg's.30 e 84.